Introduction aux systèmes dynamiques

Patrice Le Calvez

Cours introductif, Master 2

2023-2024

1.1 Orbites

Soit X un ensemble et $T : X \to X$ une application. On veut étudier l'action naturelle de $\mathbf{N}$ obtenue par les itérés $T^n = T \circ \ldots \circ T$ (n fois), et plus particulièrement par les propriétés asymptotiques de T^n. Si T est une bijection, on peut définir T^k, $k \leq 0$, en posant $T^k = (T^{-k})^{-1}$, obtenant ainsi une action de $\mathbf{Z}$.

Définition. L'*orbite positive* d'un point $x \in X$ est l'ensemble $O^+(x) = \{T^n(x)\,, n \geq 0\}$. Si T est bijective, on peut définir l'*orbite négative* $O^-(x) = \{T^n(x)\,, n \leq 0\}$ et l'*orbite totale* ou *orbite* $O(x) = O^-(x) \cup O^+(x) = \{T^k(x)\,, k \in \mathbf{Z}\}$.

Exemple. Pour l'application
$$\begin{aligned} T : \mathbf{Z} &\to \mathbf{Z} \\ x &\mapsto x+1 \end{aligned}$$
on a $O^+(0) = \mathbf{N}$, $O^-(0) = -\mathbf{N}$ et $O(0) = \mathbf{Z}$.

Remarque. Dans le cas non inversible, on parle souvent d'orbite au lieu d'orbite positive, en l'absence d'ambiguité.

Définition. Un point $x \in X$ est un *point périodique* de T s'il existe $k \geq 1$ tel que $T^k(x) = x$. Le plus petit entier strictement positif vérifiant cette propriété est la *période* de x.

Proposition 1.1.1 : *Soit X un ensemble, $T : X \to X$ une application et x un point périodique de T, de période q. Alors :*

i) *$O^+(x)$ a q éléments, les points $x, T(x), \ldots, T^{q-1}(x)$;*

ii) *pour tout $n \geq 0$, on a $T^n(x) = T^r(x)$, où r est le reste de la division euclidienne de n par q ;*

iii) *si T est inversible, on a $O(x) = O^+(x)$ et pour tout $k \in \mathbf{Z}$, on a $T^k(x) = T^r(x)$, où r est le reste de la division euclidienne de k par q.*

Preuve. On commence par montrer, par une simple récurrence sur s, que $T^{qs}(x) = x$ pour tout $s \geq 0$. On écrit ensuite $n = qs + r$, où $s \geq 0$ et $r \in \{0, \ldots, q-1\}$. On a
$$T^n(s) = T^r(T^{qs}(x)) = T^r(x).$$
L'assertion **ii)** est donc prouvée. Pour obtenir **i)**, il reste à montrer que les points x, $T(x)$, $\ldots$, $T^{q-1}(x)$ sont distincts. Si ce n'est pas le cas, alors il existe n, n', tels que $T^n(x) = T^{n'}(x)$ et $0 \leq n < n' < q$. On en déduit
$$T^{n'-n}(x) = T^{n'-n}(T^q(x)) = T^{n'-n+q}(x) = T^{q-n}(T^{n'}(x)) = T^{q-n}(T^n(x)) = T^q(x) = x,$$
ce qui contredit la définition de q, puisque $1 \leq n' - n < q$. Pour établir **iii)**, remarquons que pour tout $s < 0$, on a
$$T^{-qs}(x) = T^{-qs}(T^{qs}(x)) = T^{-qs+qs}(x) = x.$$

Ceci implique que $T^k(x) = T^r(x)$, où r est le reste de la division euclidienne de k par q et donc que $O(x) = O^+(x)$. $\square$

1.2 Différents types de récurrence.

La périodicité est la plus forte propriété de récurrence : l'orbite se referme. Nous allons introduire dans cette section des notions de récurrence plus faibles dans le cas des systèmes dynamiques topologiques (cadre où X et T sont munis de structures supplémentaires). Un système dynamique topologique (discret) est défini par un espace topologique X (que l'on supposera toujours séparé et le plus souvent métrisable) et une application continue $T : X \to X$. Si T est un homéomorphisme, on obtient un système dynamique topologique inversible.

Définition. Une partie Y de X est *positivement invariante* si $T(Y) \subset Y$. Nous avons alors un système dynamique restreint $T|_Y : Y \to Y$. Si T est un homéomorphisme, nous dirons que Y est *négativement invariante* si $Y \subset T(Y)$ et *globalement invariante* (ou *invariante*) si $T(Y) = Y$. Dans ce dernier cas, $T|_Y$ définit un système dynamique topologique inversible.

Exemple. L'ensemble $\mathbf{N}$ est une partie positivement invariante de

$$T : \begin{array}{l} \mathbf{Z} \to \mathbf{Z} \\ x \mapsto x+1 \end{array},$$

T est inversible, mais ce n'est pas le cas de $T|_{\mathbf{N}}$.

Remarques.

1. Une orbite positive est positivement invariante.

2. Si Y est une partie positivement invariante, il en est de même de son adhérence $\overline{Y}$. En effet, si $x \in \overline{Y}$, alors pour tout voisinage U de $T(x)$, la partie $T^{-1}(U)$ est un voisinage de x puisque T est continue, ce qui implique que $T^{-1}(U) \cap Y \neq \emptyset$ puisque $x \in \overline{Y}$. Ainsi, on a

$$\emptyset \neq T(T^{-1}(U) \cap Y) \subset U \cap T(Y) \subset U \cap Y,$$

ce qui implique que $T(x) \in \overline{Y}$.

3. L'union ou l'intersection de parties positivement invariantes $(Y_i)_{i \in I}$ est positivement invariante. En effet :

$$T(\bigcap_{i \in I} Y_i) \subset \bigcap_{i \in I} T(Y_i) \subset \bigcap_{i \in I} Y_i \ \text{ et } \ T(\bigcup_{i \in I} Y_i) = \bigcup_{i \in I} T(Y_i) \subset \bigcup_{i \in I} Y_i.$$

4. Dans le cas où T est un homéomorphisme, on a des résultats similaires pour les parties négativement ou globalement invariantes.

Définition. L'*ensemble ω-limite* d'un point $x \in X$ est l'ensemble des points d'accumulation de la suite $(T^n(x))_{n \geq 0}$. Il est noté $\omega_T(x)$ (ou plus souvent $\omega(x)$ en l'absence d'ambiguïté) et on a donc :

$$\omega(x) = \bigcap_{m \geq 0} \overline{\{T^n(x)\,,\, n \geq m\}} = \bigcap_{m \geq 0} \overline{O^+(T^m(x))}.$$

Ainsi, dans le cas où X est métrisable, y appartient à $\omega(x)$ si et seulement s'il existe une suite $(n_i)_{\geq 0}$ d'entiers positifs telle que $\lim_{i\to+\infty} n_i = +\infty$ et $\lim_{i\to+\infty} T^{n_i}(x) = y$.

Exemples.

1. Si x est un point périodique, alors $\omega(x) = O^+(x)$.

2. Les ensembles ω-limites sont tous vides, dans le cas où

$$\begin{aligned} T\ :\ &\mathbf{Z} \to \mathbf{Z} \\ &x \mapsto x+1 \end{aligned}.$$

Proposition 1.2.1 : *L'ensemble $\omega(x)$ est fermé et positivement invariant. Si T est un homéomorphisme, il est globalement invariant.*

Preuve. L'ensemble $\omega(x) = \bigcap_{m\geq 0} \overline{O^+(T^m(x))}$ est une intersection de parties fermées positivement invariantes. Il est donc fermé et positivement invariant. Dans le cas où T est un homéomorphisme, on a

$$\begin{aligned} T^{-1}(\omega(x)) &= \bigcap_{m\geq 0} T^{-1}(\overline{O^+(T^m(x))}) \\ &= \bigcap_{m\geq 0} \overline{O^+(T^{m-1}(x))} \\ &= \bigcap_{m\geq -1} \overline{O^+(T^m(x))} \subset \omega(x). \end{aligned}$$

□

Remarque. Si X est compact, alors $\omega(x) \neq \emptyset$. En effet, la suite $(\overline{O^+(T^m(x))})_{m\geq 0}$ est décroissante et formée de parties fermées non vides de X. Puisque X est compact, l'intersection est non vide.

Définition. Si $T\ : X \to X$ est un homéomorphisme, on peut définir l'*ensemble α-limite* d'un point $x \in X$ comme l'ensemble des points d'accumulation de la suite $(T^{-n}(x))_{n\geq 0}$. On le note $\alpha_T(x)$ ou $\alpha(x)$ en l'absence d'ambiguïté. C'est une partie fermée globalement invariante.

Remarque. Si Y est une partie fermée positivement invariante, alors pour tout $y \in Y$, on a $\omega(y) \subset Y$. En particulier, pour tout $x \in X$ et tout $y \in \omega(x)$, on a $\omega(y) \subset \omega(x)$. Dans le cas où T est un homéomorphisme, on a $\alpha(y) \subset \omega(x)$ puisque $\omega(x)$ est invariant.

Définition. Un point $x \in X$ est *positivement récurrent* si $x \in \omega(x)$. Dans le cas où X est métrisable, cela signifie qu'il existe une suite $(n_i)_{\geq 0}$ d'entiers positifs telle que $\lim_{i\to+\infty} n_i = +\infty$ et $\lim_{i\to+\infty} T^{n_i}(x) = x$.

Remarques.

1. On emploie généralement le mot récurrent au lieu de positivement récurrent, quand il n'y a pas d'ambiguïté.

2. Tout point périodique est récurrent.

Proposition 1.2.2 : *L'ensemble $\mathrm{Rec}^+(T)$ des points positivement récurrents est positivement invariant (et invariant dans le cas où T est inversible)*

Preuve. Soit x un point positivement récurrent. Soit U un voisinage de $T(x)$ et m un entier naturel. Puisque $T^{-1}(U)$ est un voisinage de x, il existe $n \geq m$ tel que $T^n(x) \in T^{-1}(U)$. On en déduit que $T^n(T(x)) = T^{n+1}(x)$ appartient à U. On vient de montrer que $T(x)$ est positivement récurrent. Dans le cas où T est un homéomorphisme, on montre de façon similaire que $T^{-1}(x)$ est positivement récurent.

□

Remarques.

1. On verra dans le prochain chapitre que $\mathrm{Rec}^+(T)$ n'est pas nécessairement fermé.

2. Si T est un homéomorphisme, on peut définir de façon similaire l'ensemble $\mathrm{Rec}^-(T)$ des points *négativement récurrents*, ce sont les points x tels que $x \in \alpha(x)$. C'est également un ensemble globalement invariant. On verra également que l'on peut avoir $\mathrm{Rec}^+(T) \neq \mathrm{Rec}^-(T)$.

Concluons cette section par une notion encore plus faible de récurrence.

Définition. Un point $x \in X$ est *errant* s'il existe un voisinage U de x tel que $T^{-n}(U) \cap U = \emptyset$, pour tout $n \geq 1$. Dans le cas contraire, on dira que x est *non errant.*

Remarques.

1. Bien évidemment les propriétés $T^{-n}(U) \cap U \neq \emptyset$ et $U \cap T^n(U) \neq \emptyset$ sont équivalentes. Cependant les dynamiciens préfèrent généralement la première formulation : pour toute partie $Y \subset X$ et tout entier $n \geq 0$, l'ensemble $T^{-n}(Y)$ est formé des points $x \in X$ qui sont dans Y au temps n sous l'action de la dynamique. De plus, si Y est ouvert, il en est de même de $T^{-n}(Y)$, ce qui n'est pas nécessairement le cas de $T^n(Y)$. Un point x est non errant si, pour tout voisinage U de x, il existe un point $y \in U$ qui revient dans U au bout d'un certain temps.

2. Dans le cas d'un homéomorphisme, l'errance "positive" ou "négative" coïncident, il n'y a pas d'ambiguïté dans le terme "errance".

3. Remarquons que tout point positivement récurrent (et également négativement récurrent dans le cas d'un homéomorphisme) est non errant.

4. Une partie ouverte U telle que $T^{-n}(U) \cap U = \emptyset$, pour tout $n \geq 1$, est dite *errante.*

Proposition 1.2.3 : *L'ensemble $\Omega(T)$ des points non errants est fermé et positivement invariant. Il est de plus invariant dans le cas où T est un homéomorphisme.*

Preuve. Si $x \notin \Omega(T)$, il existe un voisinage U de x tel que $T^{-n}(U) \cap U = \emptyset$, pour tout $n \geq 1$. Ceci implique que $U \cap \Omega(T) = \emptyset$. Nous venons de prouver que $X \setminus \Omega(T)$ est ouvert.

Soit x un point non errant et U un voisinage de $T(x)$. L'ensemble $T^{-1}(U)$ étant un voisinage de x, il existe $n \geq 1$ tel que

$$T^{-n}\left(T^{-1}(U)\right) \cap T^{-1}(U) = T^{-n-1}(U) \cap T^{-1}(U) \neq \emptyset.$$

Ceci implique que

$$\emptyset \neq T\left(T^{-n-1}(U) \cap T^{-1}(U)\right) \subset T^{-n}(U) \cap U.$$

Ainsi, $T(x)$ est non errant.

La remarque 2 précédant la proposition 1.2.3 nous dit que $\Omega(T)$ est également négativement invariant si T est un homéomorphisme. □

Pour résumer cette section, on a les inclusions suivantes, en notant $\mathrm{Fix}(T)$ l'ensemble des points fixes de T et $\mathrm{Per}(T)$ l'ensemble des points périodiques :

$$\mathrm{Fix}(T) \subset \mathrm{Per}(T) \subset \mathrm{Rec}^{\pm}(T) \subset \Omega(T).$$

Il existe des notions encore plus faibles de récurrence que la non errance. Par exemple, dans le cas d'un espace métrique, la notion de *récurrence par chaîne* (voir exercice **).

1.3 Conjugaison, facteur.

Commençons par introduire une notion d'isomorphisme entre systèmes dynamiques.

Définition. Soit X et Y deux espaces topologiques. On dira que les transformations $T \ : X \to X$ et $S \ : Y \to Y$ sont *conjuguées* s'il existe un homéomorphisme $H \ : X \to Y$ tel que $H \circ T = S \circ H$. L'homéomorphisme H est une *conjugaison* entre T et S.

Exemple. Posons $S^1 = \{z \in \mathbf{C} \,|\, |z| = 1\}$. L'application

$$\begin{aligned} \mathrm{Exp} \ : \mathbf{R} &\to S^1 \\ x &\mapsto e^{2i\pi x} \end{aligned}$$

passe au quotient et définit un homéomorphisme naturel H entre le groupe topologique $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ et S^1 tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$ on ait $H(x + \mathbf{Z}) = e^{2i\pi x}$. Les applications

$$\begin{aligned} T \ : \mathbf{T} &\to \mathbf{T} \\ \widehat{x} &\mapsto 2\widehat{x} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} S \ : S^1 &\to S^1 \\ z &\mapsto z^2 \end{aligned}$$

sont conjuguées par H. Comme nous allons le voir, les deux systèmes dynamiques sont isomorphes.

Proposition 1.3.1 : *Si $T \ : X \to X$ et $S \ : Y \to Y$ sont conjuguées par $H \ : X \to Y$, alors pour tout $n \geq 0$ on a $H \circ T^n = S^n \circ H$. Si l'une des applications T ou S est un homéomorphisme, il en est de même de l'autre et on a $H \circ T^k = S^k \circ H$ pour tout $k \in \mathbf{Z}$.*

Preuve. L'égalité $H \circ T^n = S^n \circ H$ pour tout $n \geq 0$ se démontre par récurrence. La relation est évidente pour $n = 0$; si elle est vraie au rang $n - 1$, elle l'est également au rang n car :

$$H \circ T^n = H \circ T^{n-1} \circ T = S^{n-1} \circ H \circ T = S^{n-1} \circ S \circ H = S^n \circ H.$$

Notons maintenant que $S = H \circ T \circ H^{-1}$. Ainsi, si T est un homéomorphisme, c'est également le cas de S et on a

$$S^{-1} = (H^{-1})^{-1} \circ T^{-1} \circ H^{-1} = H \circ T^{-1} \circ H^{-1}.$$

L'homéomorphisme H conjuguant T^{-1} à S^{-1}, conjugue également T^{-n} à S^{-n}, pour tout $n \geq 0$. $\square$

Le point important est que H envoie les orbites de T sur les orbites de S. On en déduit :

Proposition 1.3.2 : *Supposons que $H : X \to Y$ conjugue $T : X \to X$ à $S : Y \to Y$.*

i) *Pour tout $x \in X$, on a $H(\omega_T(x)) = \omega_S(H(x))$.*

ii) *L'image par H des ensembles $\mathrm{Per}(T)$, $\mathrm{Rec}^+(T)$, $\Omega(T)$ sont égaux respectivement à $\mathrm{Per}(S)$, $\mathrm{Rec}^+(S)$, $\Omega(S)$. De plus, pour tout $x \in \mathrm{Per}(T)$, les points x et $H(x)$ ont la même période.*

iii) *Si T est un homéomorphisme, alors $H(\mathrm{Rec}^-(T)) = \mathrm{Rec}^-(S)$. De plus, $H(\alpha_T(x)) = \alpha_S(T(x))$ pour tout $x \in X$.*

Preuve. Commençons par prouver **i)**. On peut écrire

$$H(\omega_T(x)) = H\left(\bigcap_{m\geq 0} \overline{O^+(T^m(x))}\right) = \bigcap_{m\geq 0} \overline{H(O^+(T^m(x))} = \bigcap_{m\geq 0} \overline{O^+(S^m(H(x))))} = \omega_S(H(x))$$

On déduit de **i)** que H envoie $\mathrm{Rec}^+(T)$ sur $\mathrm{Rec}^+(S)$. Le fait que l'image par H d'un point périodique de T est un point périodique de S de même période provient de :

$$T^n(x) = x \Leftrightarrow H(T^n(x)) = H(x) \Leftrightarrow S^n(H(x)) = H(x).$$

Le lecteur vérifiera que l'image par H d'un domaine errant de T est un domaine errant de S et par conséquent que H envoie $\Omega(T)$ sur $\Omega(S)$. Il établira l'assertion **iii)**. □

Définition. Soit $T : X \to X$ et $S : Y \to Y$ deux transformations continues. L'application S est un *facteur* de T s'il existe une application surjective $H : X \to Y$ telle que $H \circ T = S \circ H$. On dit également que T est une *extension* de S ou que T est *semi-conjuguée* à S. L'application H est appelée une *semi-conjugaison*.

Exemples.

1. Fixons $\widehat{a} \in \mathbf{T}$. La rotation

$$\begin{aligned} S &: \mathbf{T} \to \mathbf{T} \\ &\widehat{x} \mapsto \widehat{x} + \widehat{a} \end{aligned}$$

est un facteur de

$$\begin{aligned} T &: \mathbf{T}^2 \to \mathbf{T}^2 \\ (\widehat{x}_1, \widehat{x}_2) &\mapsto (\widehat{x}_1 + \widehat{a}, \widehat{x}_1 + \widehat{x}_2) \end{aligned}.$$

La semi-conjugaison est la projection

$$\begin{aligned} H &: \mathbf{T}^2 \to \mathbf{T} \\ (\widehat{x}_1, \widehat{x}_2) &\mapsto \widehat{x}_1 \end{aligned}.$$

2. En considérant un facteur S de T, on perd de l'information sur la dynamique T. L'application

$$\begin{aligned} S &: \{0\} \to \{0\} \\ &0 \mapsto 0 \end{aligned}$$

est un facteur universel, il ne donne aucune information. Le lecteur établira facilement le résultat suivant :

PROPOSITION 1.3.3: *Soit $H : X \to Y$ une semi-conjugaison entre $T : X \to X$ et $S : Y \to Y$.*

i) *Pour tout $n \geq 0$ on a $H \circ T^n = S^n \circ H$.*

ii) *Pour tout $x \in X$, on a $H(\omega_T(x)) \subset \omega_S(H(x))$.*

iii) *L'image par H des ensembles $\mathrm{Per}(T)$, $\mathrm{Rec}^+(T)$, $\Omega(T)$ sont inclus respectivement dans $\mathrm{Per}(S)$, $\mathrm{Rec}^+(S)$, $\Omega(S)$. De plus, pour tout $x \in \mathrm{Per}(T)$, la période de $H(x)$ divise celle de x.*

iv) *Si T et S sont des homéomorphismes, $H \circ T^k = S^k \circ H$, pour tout $k \in \mathbf{Z}$. Par conséquent, $H(\mathrm{Rec}^-(T)) \subset \mathrm{Rec}^-(S)$ et $H(\alpha_T(x)) \subset \alpha_S(H(x))$ pour tout $x \in X$.*

Expliquons pour conclure pourquoi toute transformation continue surjective $T : X \to X$ admet une extension naturelle par un homéomorphisme, obtenue comme limite projective. Notons $\mathbf{Z}_-$ l'ensemble des entiers négatifs ou nuls. Munissons l'ensemble $X^{\mathbf{Z}_-}$ de la topologie produit et considérons la partie

$$\tilde{X} = \left\{ (x_k)_{k \leq 0} \in X^{\mathbf{Z}_-} \mid T(x_k) = x_{k+1} \text{ si } k < 0 \right\}.$$

L'application

$$\begin{aligned} \tilde{T} : \tilde{X} &\to \tilde{X} \\ (x_k)_{k \leq 0} &\mapsto (T(x_k))_{k \leq 0} \end{aligned}$$

est un homéomorphisme de $\tilde{X}$ dont la réciproque s'écrit:

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{-1} : \tilde{X} &\to \tilde{X} \\ (x_k)_{k \leq 0} &\mapsto (x_{k-1})_{k \leq 0} \end{aligned}.$$

C'est également une extension de T puisque la projection $H : (x_k)_{k \leq 0} \mapsto x_0$ est continue, vérifie $H \circ \tilde{T} = T \circ H$ et est surjective car T est surjective.

1.4 Caractérisation des systèmes dynamiques.

Nous ne nous intéresserons ici, non pas aux propriétés des orbites d'un système dynamique donné, mais aux propriétés du système lui-même.

Définition. Nous dirons qu'une transformation continue $T : X \to X$ est *positivement transitive* si, pour toutes parties ouvertes non vides U et V, il existe $n \geq 0$ tel que $U \cap T^{-n}(V) \neq \emptyset$. Si T est un homéomorphisme, nous dirons que T est *transitif* si, pour toutes parties ouvertes non vides U et V, il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $U \cap T^{-k}(V) \neq \emptyset$.

Remarques.

1. Dans le cas d'un homéomorphisme, la transitivité positive est plus forte que la transitivité. Par exemple l'homéomorphisme

$$\begin{aligned} T : \mathbf{Z} &\to \mathbf{Z} \\ x &\mapsto x + 1 \end{aligned}$$

est transitif mais pas positivement transitif. Néanmoins, dans le cas où X n'a pas de point isolé, les deux notions coïncident (voir exercice 10).

2. Une manière équivalente d'exprimer la transitivité (positive) de T est de demander que $\bigcup_{n \geq 0} T^{-n}(V)$ soit dense, pour toute partie ouverte non vide V. De façon similaire, un homéomorphisme T est transitif si $\bigcup_{k \in \mathbf{Z}} T^{-k}(V)$ est dense, pour toute partie ouverte non vide V.

3. Notons que si $T : X \to X$ est positivement transitive et si V est un ouvert non vide, alors $T^{-1}(V)$ est également non vide. En effet, dans le cas contraire, on aurait $\bigcup_{n\geq 0} T^{-n}(V) = V$ et on en déduirait que V est dense, ainsi bien sûr que toute partie ouverte non vide de V (puisque de préimage vide). L'espace X étant supposé séparé, on en déduirait que V est réduit à un élément, puis que V est égal à X. Ceci contredit le fait que $T^{-1}(V)$ est vide. Par une récurrence immédiate, on prouve également que $T^{-n}(V)$ est non vide, pour tout $n \geq 0$.

4. Dans le cas où T n'est pas inversible, on parle de transitivité plutôt que de transitivité positive, en l'absence d'ambiguïté.

Nous allons donner une définition équivalente de la transitivité. Rappelons quelques définitions de topologie.

Definition. Un espace topologique est un *espace de Baire* si l'intersection de toute famille dénombrable de parties ouvertes denses est dense.

Remarques.

1. Un espace métrique complet est un espace de Baire. Il en est de même d'un espace topologique localement compact.

2. Un ensemble G_δ d'un espace topologique est l'intersection d'une famille dénombrable de parties ouvertes. Une partie X d'un espace de Baire est *résiduelle* si elle contient un ensemble G_δ dense. Remarquons que l'intersection d'une famille dénombrable de parties résiduelles est elle-même résiduelle.

Définition. Un espace topologique est *à base dénombrable* s'il existe une famille dénombrable $(U_i)_{i\in I}$ de partie ouvertes telle que toute partie ouverte est une réunion d'ensembles U_i. C'est le cas d'un espace métrique *séparable* (c'est-à-dire ayant une partie dénombrable dense), par exemple le cas d'un espace métrique compact.

PROPOSITION 1.4.1 : *Soit X un espace de Baire à base dénombrable et $T : X \to X$ une transformation continue. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) *T est positivement transitive ;*

ii) *il existe x tel que $\omega(x) = X$;*

iii) *l'ensemble des points $x \in X$ tels que $\omega(x) = X$ est un ensemble G_δ dense.*

Preuve. Commençons par prouver que **ii)** implique **i)**. Donnons nous deux parties ouvertes non vides U et V. Le fait que $\omega(x) = X$ implique qu'il existe $n \geq 0$ tel que $T^n(x) \in U$ et qu'il existe $n' \geq n$ tel que $T^{n'}(x) \in V$. Le point $T^n(x)$ appartient donc à $U \cap T^{n-n'}(V)$. Il existe donc $n'' \geq 0$ tel que $U \cap T^{-n''}(V) \neq \emptyset$. Remarquons que nous n'avons besoin d'aucune hypothèse sur X pour prouver cette implication.

Puisqu'une partie résiduelle d'un espace de Baire est non vide, on sait que **iii)** implique **ii)**. Il reste donc à prouver que **i)** implique **iii)**. Considérons une base dénombrable $(U_i)_{i\in I}$ de la topologie de X. L'application T étant positivement transitive, on sait d'après le remarque 3 vue un peu plus haut, que pour tout $i \in I$ et tout $m \geq 0$, l'ensemble ouvert $T^{-m}(U_i)$ est non vide et donc que $\bigcup_{n\geq m} T^{-n}(U_i) = \bigcup_{n\geq 0} T^{-n}(T^{-m}(U_i))$ est dense. Ainsi,

$$Y = \bigcap_{i\in I,\, m\geq 0} \left(\bigcup_{n\geq m} T^{-n}(U_i) \right)$$

est un ensemble G_δ dense. Montrons que c'est exactement l'ensemble des points x tels que $\omega(x) = X$. Un point x appartient à Y si et seulement si pour tout $i \in I$ et tout $m \geq 0$ il existe $n \geq m$ tel que $T^n(x) \in U_i$. Chaque U_i étant ouvert on doit avoir $x \in Y$ si $\omega(x) = X$. Mais la réciproque est également vraie car $(U_i)_{i \in I}$ est une base de la topologie. En effet, pour tout $y \in X$ et tout voisinage U of y, on peut trouver $i \in I$ tel que $U_i \subset U$. Ainsi, pour tout $m \geq 0$, il existe $n \geq m$ tel que $T^n(x) \in U$. □

Exemples. On verra dans la prochaine section que

$$\begin{aligned} T_1 \ : \mathbf{T} &\to \mathbf{T} \\ \widehat{x} &\mapsto 2\widehat{x} \end{aligned}$$

est positivement transitive et que

$$\begin{aligned} T_2 \ : \mathbf{T} &\to \mathbf{T} \\ \widehat{x} &\mapsto \widehat{x} + \widehat{a} \end{aligned}$$

est positivement transitive si et seulement si $\widehat{a} \notin \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$.

On a un résultat analogue pour la transitivité :

PROPOSITION 1.4.2 : *Soit X un espace de Baire à base dénombrable et $T \ : X \to X$ un homéomorphisme. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) *T est transitif ;*

ii) *il existe x tel que $\overline{O(x)} = X$;*

iii) *l'ensemble des $x \in X$ tels que $\overline{O(x)} = X$ est un ensemble G_δ dense.*

Preuve. Commençons là encore par prouver que **ii)** implique **i)**. Donnons nous deux parties ouvertes non vides U et V. Le fait que $\overline{O(x)} = X$ implique qu'il existe $k \in \mathbf{Z}$ et $k' \in \mathbf{Z}$ tels que $T^k(x) \in U$ et $T^{k'}(x) \in V$. Le point $T^k(x)$ appartient à $U \cap T^{k-k'}(V)$.

Là encore, on sait que **iii)** implique **ii)** et il reste donc à prouver que **i)** implique **iii)**. Considérons une base dénombrable $(U_i)_{i \in I}$ de la topologie de X. L'homéomorphisme T étant transitif, on sait que pour tout $i \in I$, l'ensemble ouvert $\bigcup_{k \in \mathbf{Z}} T^{-k}(U_i)$ est dense. Ainsi,

$$Y = \bigcap_{i \in I} \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} T^{-k}(U_i)$$

est un ensemble G_δ dense. Un point x appartient à Y si et seulement si son orbite $O(x)$ rencontre chaque U_i, c'est-à-dire si elle est dense dans X. □

Définition. Une transformation continue $T \ : X \to X$ est *(positivement) topologiquement mélangeante* si, pour toutes parties ouvertes non vides U et V, il existe $m \geq 0$ tel que $U \cap T^{-n}(V) \neq \emptyset$ pour tout $n \geq m$.

Exemples Il s'agit d'une propriété plus forte que la transitivité. Nous verrons que l'application

$$\begin{aligned} T_1 \ : \mathbf{T} &\to \mathbf{T} \\ \widehat{x} &\mapsto 2\widehat{x} \end{aligned}$$

est topologiquement mélangeante mais que

$$\begin{aligned} T_2 \ : \mathbf{T} &\to \mathbf{T} \\ \widehat{x} &\mapsto \widehat{x} + \widehat{a} \end{aligned}$$

ne l'est pas, même si $\widehat{a} \notin \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$.

Nous allons introduire une dernière notion qui est également plus forte que la transitivité.

Proposition 1.4.3 : *Soit $T : X \to X$ une transformation continue d'un espace topologique X. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *pour tout $x \in X$, on a $\overline{O^+(x)} = X$;*

ii) *pour tout $x \in X$, on a $\omega(x) = X$;*

iii) *si Y est une partie fermée positivement invariante, alors $Y = \emptyset$ ou $Y = X$.*

Si ces conditions sont vérifiées, on dira que T est positivement minimale.

Preuve. Montrons d'abord que **i)** ou **ii)** implique **iii)**. Soit Y une partie fermée positivement invariante. Si $Y \neq \emptyset$, on peut choisir $x \in Y$. Chacun des ensembles $\overline{O^+(x)}$ et $\omega(x)$ étant contenu dans Y, on en déduit que X est inclus dans Y si **i)** ou **ii)** est vérifiée.

Pour montrer que **iii)** implique **i)**, il suffit de remarquer que $\overline{O^+(x)}$ est une partie fermée non vide positivement invariante. Pour prouver que **i)** implique **ii)**, écrivons

$$\omega(x) = \bigcap_{m \geq 0} \overline{O^+(T^m(x))} = \bigcap_{m \geq 0} X = X.$$

□

Remarque. Un système dynamique positivement minimal est positivement transitif.

Exemples. Nous verrons que

$$\begin{aligned} T_1 \ : \mathbf{T} &\to \mathbf{T} \\ \widehat{x} &\mapsto 2\widehat{x} \end{aligned}$$

n'est pas positivement minimale mais que

$$\begin{aligned} T_2 \ : \mathbf{T} &\to \mathbf{T} \\ \widehat{x} &\mapsto \widehat{x} + \widehat{a} \end{aligned}$$

est positivement minimale si $\widehat{a} \notin \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$.

On a une définition analogue pour les homéomorphismes. La preuve du résultat qui suit est similaire à celle de la proposition 1.4.3.

Proposition 1.4.4 : *Soit $T : X \to X$ un homéomorphisme d'un espace topologique X. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) *pour tout $x \in X$, on a $\overline{O(x)} = X$;*

ii) *si Y est une partie fermée globalement invariante, alors $Y = \emptyset$ ou $Y = X$.*

Si ces conditions sont vérifiées, on dira que T est minimal.

Pour un homéomorphisme, la minimalité positive est plus forte que la minimalité. Par exemple,

$$\begin{aligned} T \ : \mathbf{Z} &\to \mathbf{Z} \\ x &\mapsto x + 1 \end{aligned}$$

est minimal mais pas positivement minimal. Là-encore, on parlera souvent de minimalité, au lieu de minimalité positive dans le cas d'un système dynamique non inversible. Le résultat qui suit (l'assertion **ii)** est un théorème dû à Gottshalk) nous dit qu'il n'y aura généralement pas d'ambiguïté.

Proposition 1.4.5 : *On a les deux résultats suivants :*

i) *Un homéomorphisme T d'un espace topologique compact X est positivement minimal s'il est minimal.*

ii) *Une transformation continue T d'un espace topologique localement compact X n'est jamais positivement minimale si X n'est pas compact.*

Preuve. Commençons par démontrer **i)**. Soit X un espace topologique compact et T un homéomorphisme de X qui est minimal. Nous voulons montrer que T est positivement minimal. Soit Y une partie fermée non vide de X vérifiant $T(Y) \subset Y$. Nous voulons montrer que $Y = X$. La suite $(T^n(Y))_{n\geq 0}$ est une suite décroissante de parties fermées non vides. Puisque X est compact, nous en déduisons que $Z = \bigcap_{n\geq 0} T^n(Y)$ est fermé et non vide. Puisque T est bijective, nous pouvons écrire $T(Z) = \bigcap_{n\geq 0} T^{n+1}(Y)$. Nous avons donc

$$Z = \bigcap_{n\geq 0} T^n(Y) \subset \bigcap_{n\geq 1} T^n(Y) = \bigcap_{n\geq 0} T^{n+1}(Y) = T(Z) \subset \bigcap_{n\geq 0} T^n(Y) = Z.$$

Ainsi, Z est globalement invariant, et donc égal à X puisque T est minimal. Il en est donc de même de Y (qui contient Z).

Maintenant, démontrons **ii)**. Soit X un espace topologique localement compact. Supposons qu'il existe une transformation continue T de X qui soit positivement minimale et montrons que X est compact. Par hypothèse sur X, on peut trouver une partie ouverte non vide U qui est relativement compacte. On peut supposer que $U \neq X$ (sinon X est compact). Le complémentaire de $\bigcup_{k\geq 0} T^{-k}(U)$ est fermé, distinct de X et positivement invariant. Il est donc vide puisque T est positivement minimal. En d'autre termes, on a $X = \bigcup_{k\geq 0} T^{-k}(U)$. Mais puisque $U \neq X$, on a $\bigcup_{k\geq 1} T^{-k}(U) \neq \emptyset$. Le complémentaire de $\bigcup_{k\geq 1} T^{-k}(U)$ est vide puisqu'il est également fermé, distinct de X et positivement invariant. On a donc $X = \bigcup_{k\geq 1} T^{-k}(U)$. Par compacité de $\overline{U}$, il existe K tel que $\overline{U} \subset \bigcup_{1\leq k\leq K} T^{-k}(U)$ et donc tel que $\overline{U} \subset \bigcup_{1\leq k\leq K} T^{-k}(\overline{U})$. Ceci implique que $\bigcup_{k\geq 1} T^k(\overline{U}) = \bigcup_{1\leq k\leq K} T^k(\overline{U})$ puisque, sous l'action de T, tout point de $\overline{U}$ revient dans $\overline{U}$ au plus au temps K. L'ensemble $\bigcup_{1\leq k\leq K} T^k(\overline{U})$ est non vide, compact comme réunion finie de parties compactes (et donc fermé) et positivement invariant, puisque

$$T(\bigcup_{k\geq 1} T^k(\overline{U})) = \bigcup_{k\geq 1} T^{k+1}(\overline{U}) \subset \bigcup_{k\geq 1} T^k(\overline{U}).$$

Ainsi $\bigcup_{1\leq k\leq K} T^k(\overline{U})$ est égal à X puisque T est positivement minimal. L'ensemble X est donc compact. □

En particulier, il n'existe pas d'homéomorphisme positivement minimal sur $\mathbf{R}^n$. On montre facilement qu'il n'y a pas d'homéomorphisme minimal sur $\mathbf{R}$ mais on sait également, d'après un théorème de point fixe dû à Brouwer (qui n'est pas le théorème bien connu), qu'il n'y a pas d'homéomorphisme minimal sur $\mathbf{R}^2$. L'existence ou non d'homéomorphisme minimal sur $\mathbf{R}^n$, est par contre un problème ouvert si $n \geq 3$.

Définition. Soit $T\ : X \to X$ une transformation continue d'un espace topologique X. Une partie fermée positivement invariante $Y \subset X$ est *positivement minimale* si la transformation restreinte $T|_Y\ : Y \to Y$ est positivement minimale.

La proposition qui suit est une conséquence immédiate de la proposition 1.4.3

PROPOSITION 1.4.6 : *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *Y est positivement minimal ;*

ii) *pour tout $x \in Y$, on a $\overline{O^+(x)} = Y$;*

iii *pour tout $x \in Y$, on a $\omega(x) = Y$;*

iv) *Y est un élément minimal, pour l'inclusion, dans l'ensemble des parties fermées non vides et positivement invariantes de X.*

Similairement, si $T\ : X \to X$ est un homéomorphisme, une partie fermée invariante $Y \subset X$ est *minimale* si l'homéomorphisme restreint $T|_Y\ : Y \to Y$ est minimal et on a :

PROPOSITION 1.4.7 : *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *Y est minimal ;*

ii) *pour tout $x \in Y$, on a $\overline{O(x)} = Y$;*

ii) *Y est un élément minimal, pour l'inclusion, dans l'ensemble des parties fermées non vides et invariantes de X.*

Énonçons maintenant le résultat important suivant :

PROPOSITION 1.4.8 : *Soit $T\ : X \to X$ une transformation continue d'un espace topologique compact X. Il existe alors une partie fermée positivement minimale $Y \subset X$.*

Preuve. Notons $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties fermées non vides positivement invariantes. Il n'est pas vide car il contient X. Remarquons qu'il est inductif pour l'inclusion. En effet, si $(Y_i)_{i\in I}$ est une famille totalement ordonnée d'éléments de $\mathcal{F}$, l'ensemble $Y = \bigcap_{i\in I} Y_i$ est fermé, positivement invariant et vérifie $Y \subset Y_i$ pour tout $i \in I$. Pour montrer qu'il est dans $\mathcal{F}$, il reste à vérifier qu'il n'est pas vide. C'est une conséquence immédiate de la compacité de X et du fait que pour toute partie finie $J \subset I$, on a $Y = \bigcap_{i\in J} Y_i \neq \emptyset$ (puisque la famille est totalement ordonnée). Il ne reste plus qu'à appliquer le lemme de Zorn pour obtenir un élément minimal de $\mathcal{F}$. □

Remarques.

1. Il n'y a pas de partie positivement minimale pour

$$\begin{aligned} T\ : \mathbf{Z} &\to \mathbf{Z} \\ x &\mapsto x+1 \end{aligned}.$$

L'ensemble $\mathcal{F}$ est totalement ordonné, il est constitué de $\mathbf{Z}$ et des ensembles $Y_i = \{i, i+1, \ldots\}$. Remarquons que $\bigcap_{i\in\mathbf{Z}} Y_i = \emptyset$.

2. Une preuve analogue à celle de la proposition 1.4.8 nous dit qu'il existe une partie fermée invariante minimale dans le cas où T est un homéomorphisme d'un espace topolgique compact X.

Énonçons maintenant un résultat, souvent appelé *Théorème de récurrence de Birkhoff* :

PROPOSITION 1.4.9 : *Si X est compact, toute application continue $T : X \to X$ a au moins un point positivement récurrent.*

Preuve. Considérons une partie positivement minimale $Y \subset X$ puis choisissons $x \in Y$. □

Concluons cette section par la remarque suivante :

PROPOSITION 1.4.10 : *Soient $T : X \to X$ et $S : Y \to Y$ deux transformations continues. On suppose que S est un facteur de T. Si T est (positivement) transitive, topologiquement mélangeante ou (positivement) minimale, il en est de même de S.*

Preuve. Notons H la semi-conjugaison entre T et S. Supposons que T soit positivement transitive. Soit U et V deux parties ouvertes non vides de Y. Alors $H^{-1}(U)$ et $H^{-1}(V)$ sont des parties ouvertes non vides de X car H est continue et surjective. Il existe donc $n \geq 0$ tel que $H^{-1}(U) \cap T^{-n}(H^{-1}(V) \neq \emptyset$. Mais l'image par H de cet ensemble est inclus dans $U \cap H(T^{-n}(H^{-1}(V))) = U \cap S^{-n}(V)$ puisque $H \circ T^n = S^n \circ H$.

Si T est positivement topologiquement mélangeante, le raisonnement précédent nous dit qu'il en est de même de S.

Supposons maintenant que T soit positivement minimale. Soit Z une partie fermée non vide de Y positivement invariante par S. Alors $H^{-1}(Z)$ est une partie fermée non vide de X car H est continue et surjective. Ainsi $H^{-1}(Z) = X$ et donc $Z = H(X) = Y$. La transformation S est donc positivement minimale. □

1.5 Les exemples classiques

Le décalage de Benouilli unilatéral

Soit A un ensemble fini de cardinal $p \geq 2.$, on dira que A est un *alphabet*. On note $X = A^{\mathbf{N}}$ l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\geq 0}$ dans A. On va munir cet ensemble de distances. Pour tous x et y dans X, on note $N(x, y)$ le premier entier $n \geq 0$ tel que $x_n \neq y_n$ (si $x = y$, on pose $N(x, y) = +\infty$). Fixons $\alpha \in]0, 1[$ et définissons pour tous x, y dans X :

$$\begin{cases} d_\alpha(x,y) = \alpha^{N(x,y)} & \text{si } x \neq y, \\ d_\alpha(x,y) = 0 & \text{si } x = y. \end{cases}$$

On obtient ainsi une distance sur X. Le seul fait non trivial à vérifier est l'inégalité triangulaire. On a en fait une distance ultramétrique puisque

$$d_\alpha(x,z) \leq \max(d_\alpha(x,y), d_\alpha(y,z))$$

car

$$N(x,z) \geq \min(N(x,y), N(y,z)).$$

Pour tout *mot* $w = (w_0, \dots, w_{m-1}) \in A^m$ et tout $n_0 \geq 0$ on peut définir le *cylindre*

$$C_w^{n_0} = \{x = (x_n)_{n\geq 0} \in A^{\mathbf{N}} \mid x_{n+n_0} = w_n \ \text{ pour tout } \ n \in \{0, \dots, m-1\}\}.$$

PROPOSITION 1.5.1 : *Les parties ouvertes de (X, d_α) sont les unions de cylindres.*

Preuve. Tout cylindre $C_w^{n_0}$ est ouvert. En effet, posons $N = n_0 + m - 1$. On a

$$x \in C_w^{n_0} \text{ et } N(x,y) > N \Rightarrow y \in C_w^{n_0}.$$

La boule $B(x, \alpha^N)$ est donc incluse dans $C_w^{n_0}$, si $x \in C_w^{n_0}$.

Pour montrer que toute partie ouverte est réunion de cylindres, il suffit de remarquer que pour tout $x \in X$ et tout $N \geq 0$, on a $B(x, \alpha^N) = C_w^0$, où $w = (x_0, \ldots, x_N)$. □

La proposition précédente nous dit que la topologie de (X, d_α) est indépendante de α, c'est la topologie produit, si A est muni de la topologie discrète. Une suite $(x^m)_{m\geq 0}$ converge vers x si, pour tout $N \geq 0$, il existe $M \geq 0$ tel que $x_n^m = x_n$, si $n \leq N$ et $m \geq M$. Puisque les cylindres sont en nombre dénombrable, X est à base dénombrable. On vérifie sans peine que les cylindres sont également fermés. On peut en déduire que X est totalement discontinu. On vérifie également qu'il n'y a pas de point isolé. L'espace X est donc un *ensemble de Cantor* (tous les espaces compacts continus et sans point isolé sont homéomorphes et appelés ainsi).

PROPOSITION 1.5.2 : *L'ensemble X est compact.*

Preuve. C'est un cas simple du théorème de Tychonov sur la compacité du produit d'espaces compacts. Il suffit ici d'appliquer le principe diagonal de Cantor. Soit $(x^m)_{m\geq 0}$ une suite d'éléments de X. Il existe $x_0 \in A$ et une sous-suite $(x^{\theta_0(m)})_{m\geq 0}$, tel que $x_0^{\theta_0(m)} = x_0$ pour tout $m \geq 0$. Il existe $x_1 \in A$ et une sous-suite $(x^{\theta_0\circ\theta_1(m)})_{m\geq 0}$, telle que $x_1^{\theta_0\circ\theta(m)} = x_1$ pour tout $m \geq 0$. On définit par récurrence une suite $x = (x_n)_{n\geq 0} \in X$ et une suite $(\theta_n)_{n\geq 0}$ de fonctions strictement croissantes $\theta_n\ : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ telles que $x_n^{\theta_0\circ\ldots\circ\theta_n(m)} = x_n$ pour tout $m \geq 0$. On vérifie aisément que la fonction $\theta\ : m \mapsto \theta_0 \circ \ldots \circ \theta_m(m)$ est strictement croissante et que la sous-suite $(x^{\theta(m)})_{m\geq 0}$ converge vers x. □

PROPOSITION 1.5.3 : *L'application*

$$\begin{aligned} \sigma\ &: X \to X \\ (x_n)_{n\geq 0} &\mapsto (x_{n+1})_{n\geq 0} \end{aligned}$$

est continue, on l'appelle le décalage de Bernouilli unilatéral*.*

Preuve. Remarquons que la préimage d'un cylindre est également un cylindre. Plus précisément, pour tout cylindre $C_w^{n_0}$, on a $\sigma^{-1}(C_w^{n_0}) = C_w^{n_0+1}$. □

Remarques.

1. L'application σ a exactement p points fixes, qui sont les suites constantes. Plus généralement σ^q a p^q points fixes obtenus par concaténation d'un même mot de longueur q dans l'alphabet A. Ce sont les points périodiques de période divisant q.

2. Toute suite $x = (x_n)_{n\geq 0} \in X$ est limite d'une suite $(x^m)_{m\geq 1}$ d'éléments de X qui sont tous périodiques. Il suffit de prendre pour x^m la suite qui est périodique de période m et qui vérifie $x_n^m = x_n$ si $n < m$. Le fait que l'ensemble des points périodiques de σ est dense implique que σ n'a pas de point errant. En effet, $\Omega(\sigma)$ est fermé et contient $\mathrm{Per}(\sigma)$.

PROPOSITION 1.5.4 : *Le décalage de Bernouilli est transitif, et même mieux, il est topologiquement mélangeant.*

Preuve. Il suffit de prouver que si $C_w^{n_0}$ et $C_{w'}^{n'_0}$ sont deux cylindres quelconques, il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$, on a $C_w^{n_0} \cap \sigma^{-n}\left(C_{w'}^{n'_0}\right) \neq \emptyset$. Or on a $\sigma^{-n}\left(C_{w'}^{n'_0}\right) = C_{w'}^{n'_0+n}$. Notons $w = (w_0, \dots, w_n)$ et $w' = (w'_0, \dots, w'_{n'})$. Si n est assez grand, les ensembles $(n_0, \dots, n_0 + m - 1)$ et $(n + n'_0, \dots, n + n'_0 + m' - 1)$ sont disjoints et par conséquent on a $C_w^{n_0} \cap \sigma^{-n}\left(C_{w'}^{n'_0}\right) \neq \emptyset$. □

Pour finir, remarquons que tout point $x \in X$ a p^n antécédents par σ^n et que $\bigcup_{n\geq 0} \sigma^{-n}(\{x\})$ est dense. On peut vérifier que cette propriété implique la transitivité.

Le décalage de Bernouilli bilatéral

On garde le même alphabet A, mais cette fois ci $X = A^{\mathbf{Z}}$ est l'ensemble des suites bilatérales $x = (x_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ dans A. Pour tous x et y dans X, on note $N(x, y)$ le premier entier $n \geq 0$ tel que $x_n \neq y_n$ ou $x_{-n} \neq y_{-n}$ (si $x = y$, on pose $N(x, y) = +\infty$). On fixe $\alpha \in]0, 1[$ et on définit pour tous x, y dans X :

$$\begin{cases} d_\alpha(x,y) = \alpha^{N(x,y)} & \text{si } x \neq y, \\ d_\alpha(x,y) = 0 & \text{si } x = y. \end{cases}$$

On obtient là-encore une distance sur X. Comme dans le cas unilatéral, pour tout mot $w = (w_0, \dots, w_{m-1}) \in A^m$ et tout $k_0 \in \mathbf{Z}$ on définit le cylindre

$$C_w^{k_0} = \{x = (x_k)_{k\in\mathbf{Z}} \in A^{\mathbf{Z}} \,|\, x_{n+k_0} = w_n \ \text{ pour tout } \ n \in \{0, \dots, m-1\}\}.$$

On obtient ainsi une base dénombrable de la topologie de d_α. On démontre là encore que X est compact.

Proposition 1.5.5 : *L'application*

$$\begin{aligned} \sigma \ &: X \to X \\ (x_k)_{k\in\mathbf{Z}} &\mapsto (x_{k+1})_{k\in\mathbf{Z}} \end{aligned}$$

est un homéomorphisme. On l'appelle le décalage de Bernouilli bilatéral.

Preuve. Ici encore, pour tout cylindre $C_w^{n_0}$, on a $\sigma^{-1}(C_w^{n_0}) = C_w^{n_0+1}$ et $\sigma(C_w^{n_0}) = C_w^{n_0-1}$. □

L'homéomorphisme σ^q a p^q points fixes obtenus par concaténation du même mot de longueur q dans l'alphabet A. Comme dans le cas unilatéral, on a $\overline{\mathrm{Per}(\sigma)} = \Omega(\sigma) = X$ et on démontre de façon analogue :

Proposition 1.5.6 : *Le décalage de Bernouilli est positivement (et négativement) topologiquement mélangeant.*

Les rotations de T

On fixe $a \in \mathbf{R}$ et on pose $\widehat{a} = a + \mathbf{Z}$. On rappelle que la translation $T_a \ : x \mapsto x + a$ relève la rotation $T_{\widehat{a}} \ : x \mapsto \widehat{x} + \widehat{a}$.

Proposition 1.5.7 : *Si $a = \dfrac{p}{q}$ est rationnel, écrit sous forme irréductible, alors tout point $\widehat{x} \in \mathbf{T}$ est un point périodique de $T_{\widehat{a}}$, de période q.*

Preuve. Soit $\widehat{x} \in \mathbf{T}$. On écrit $\widehat{x} = x + \mathbf{Z}$, où $x \in \mathbf{R}$, et on a

$$T_{\widehat{a}}^{q}(\widehat{x}) = T_{a}^{q}(x) + \mathbf{Z} = x + p + \mathbf{Z} = \widehat{x},$$

ce qui implique que $\widehat{x}$ est un point périodique de $T_{\widehat{a}}$, dont la périodie q' divise q. Montrons que $q' = q$. Puisque $T_{\widehat{a}}^{q}(\widehat{x}) = T_{a}^{q'}(x) + \mathbf{Z} = \widehat{x}$, il existe $p' \in \mathbf{Z}$ tel que $x + q'a = x + p'$. Ainsi, $a = \dfrac{p'}{q'}$, ce qui implique que $p' = p$ et $q' = q$. □

PROPOSITION 1.5.8 : *Si a est irrationnel, alors $T_{\widehat{a}}$ est positivement et négativement minimal.*

Preuve. Puisque $\mathbf{T}$ est compact, il suffit de prouver que $T_{\widehat{a}}$ est minimal. Supposons qu'il existe un ensemble fermé invariant X qui ne soit ni vide, ni égal à $\mathbf{T}$. L'homéomorphisme $T_{\widehat{a}}$ induit une bijection naturelle sur l'ensemble des composantes connexes de $\mathbf{T} \setminus X$. Si $\widehat{d}$ est la distance sur $\mathbf{T}$ induite par la norme usuelle de $\mathbf{R}$, nous savons que $T_{\widehat{a}}$ est une isométrie : pour tous $\widehat{x}$ et $\widehat{x}'$ dans $\mathbf{T}$, nous avons $\widehat{d}(T_{\widehat{a}}(\widehat{x}), T_{\widehat{a}}(\widehat{x}')) = \widehat{d}(\widehat{x}, \widehat{x}')$. Fixons $\delta > 0$ assez petit. Il y a alors un nombre fini (non nul) de composantes connexes de $\mathbf{T} \setminus X$ et elles sont permutées par $T_{\widehat{a}}$. Elles sont donc périodiques, ce qui implique que leurs extrémités sont des points périodiques de $T_{\widehat{a}}$. Il reste à prouver que $T_{\widehat{a}}$ n'a pas de point périodique. Raisonnons par l'absurde. Si $T_{\widehat{a}}^{q}(\widehat{x}) = \widehat{x}$ et si $x \in \pi^{-1}(\{\widehat{x}\})$, alors il existe $p \in \mathbf{Z}$ tel que $x + qa = x + p$, ce qui implique que $a = p/q$. Ceci contredit l'irrationalité de a. □

Remarque. Il existe une preuve plus classique de la proposition 1.5.8. Utilisant la classification des sous-groupes additifs de $\mathbf{R}$, on commence par montrer que $\mathbf{Z} + a\mathbf{Z}$ est dense dans $\mathbf{R}$. On peut alors en déduire (ce n'est pas très compliqué mais pas immédiat) que $\mathbf{Z} + a\mathbf{N}$ est dense dans $\mathbf{R}$. Or ceci signifie que l'orbite positive de $\widehat{0}$ pour $T_{\widehat{a}}$ est dense. Un argument que l'on va donner un peu plus loin (dans la preuve de la proposition 1.5.10) nous dira que toute orbite positive est dense.

PROPOSITION 1.5.9 : *La rotation $T_{\widehat{a}}$ n'est pas topologiquement mélangeante.*

Preuve. Utilisons le fait que $T_{\widehat{a}}$ est une isométrie pour $\widehat{d}$. Supposons que $\widehat{x}$ et $\widehat{x}'$ soient distincts et posons $\varepsilon = \widehat{d}(\widehat{x}, \widehat{x}') > 0$. Considérons les boules $U = B(\widehat{x}, \dfrac{\varepsilon}{4})$ et $U' = B(\widehat{x}', \dfrac{\varepsilon}{4})$. Que ce soit dans le cas rationnel ou irrationnel, on peut trouver n arbitrairement grand tel que $\widehat{d}(T_{\widehat{a}}^{n}\widehat{x}, \widehat{x}) < \dfrac{\varepsilon}{4}$. Ceci implique que $U \cap T^{-n}(U') = \emptyset$. □

Remarque. La rotation d'angle $2\pi a$:

$$\begin{aligned} R_a \ : S^1 &\to S^1 \\ z &\mapsto e^{2i\pi a} z \end{aligned}$$

est conjuguée à $T_{\widehat{a}}$ par l'homéomorphisme $H \ : \mathbf{T} \to S^1$ tel que $H(x + \mathbf{Z}) = e^{2i\pi x}$. Ainsi, toute propriété dynamique de $T_{\widehat{a}}$ est transportée par H en une propriété de R_a.

Les rotations de $\mathbf{T}^r$

Fixons une norme $\| \ \|$ sur $\mathbf{R}^r$ pour définir une distance $\widehat{d}$ sur $\mathbf{T}^r$ en posant

$$\widehat{d}(\widehat{x}, \widehat{y}) = \min_{x + \mathbf{Z}^r = \widehat{x},\, y + \mathbf{Z}^r = \widehat{y}} \|x - y\|.$$

Fixons ensuite $a = (a_1, \dots, a_r) \in \mathbf{R}^r$ et considérons la translation $T_a : x \mapsto x + a$ qui relève la rotation $T_{\widehat{a}} : x \mapsto \widehat{x} + \widehat{a}$, où $\widehat{a} = a + \mathbf{Z}^r$. Ici, $T_{\widehat{a}}$ est également une isométrie.

PROPOSITION 1.5.10 : *Tout point de $\mathbf{T}^r$ est un point positivement récurrent de $T_{\widehat{a}}$.*

Preuve. Le théorème de récurrence de Birkhoff nous dit qu'il existe au moins un point positivement récurrent $\widehat{x}_0$. Toute rotation $T_{\widehat{x}}$ commute avec $T_{\widehat{a}}$, c'est-à-dire conjugue $T_{\widehat{a}}$ à elle-même. Ainsi $T_{\widehat{x}}(\widehat{x}_0)$ est également un point positivement récurrent de $T_{\widehat{a}}$. Ceci implique bien évidemment la proposition.

Nous pouvons également prouver la proposition sans l'aide du théorème de récurrence de Birkhoff. Fixons $\varepsilon > 0$ puis un entier $r > 1/\varepsilon$. La famille $(T^n_{\widehat{a}}(\widehat{0}))_{0 \le n < r}$ contient r points. Il existe donc deux entiers $0 \le n_0 < n_1 < r$ tels que $\widehat{d}(T^{n_0}_{\widehat{a}}(\widehat{0}), T^{n_1}_{\widehat{a}}(\widehat{0})) < \varepsilon$. Posons $x_0 = T^{n_0}_{\widehat{a}}(\widehat{0})$ et $n = n_1 - n_0$. Nous avons $\widehat{d}(T^n_{\widehat{a}}(x_0), x_0) < \varepsilon$. Utilisant le fait que toute rotation $T_{\widehat{x}}$ est une isométrie qui commute avec $T_{\widehat{a}}$, on en déduit que pour tout $\widehat{y}$, on a $\widehat{d}(T^n_{\widehat{a}}(\widehat{y}), \widehat{y}) < \varepsilon$. Ainsi tout point est positivement récurrent. □

On a la généralisation suivante du cas uni-dimensionnel :

PROPOSITION 1.5.11 : *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) *$T_{\widehat{a}}$ est positivement transitive ;*

ii) *$T_{\widehat{a}}$ est positivement minimale ;*

iii) *les réels 1, $a_1, \dots, a_r$ sont rationnellement indépendants (il n'existe pas de $n+1$-uplet $(k_0, \dots, k_r) \in \mathbf{Z}^{r+1} \setminus \{0\}$ tel que $k_0 + k_1 a_1 + \dots + k_r a_r = 0$).*

Preuve. Les conditions **i)** et **ii)** sont équivalentes. En effet, l'argument de la preuve de la proposition 1.5.10 nous dit que si $\widehat{x}_0$ a un ensemble ω-limite égal à $\mathbf{T}^r$, alors pour tout $\widehat{x} \in \mathbf{T}^r$, le point $T_{\widehat{x}}(\widehat{x}_0)$ a également un ensemble ω-limite égal à $\mathbf{T}^r$ et par conséquent que la transitivité implique la minimalité.

Montrons maintenant par contraposée que **i)** implique **iii)**. Supposons qu'il existe $(k_0, \dots, k_r) \in \mathbf{Z}^{r+1} \setminus \{0\}$ tel que $k_0 + k_1 a_1 + \dots + k_r a_r = 0$. Considérons la forme linéaire

$$L : (x_1, \dots, x_r) \mapsto \sum_{i=1}^{r} k_i x_i.$$

L'application, de $\mathbf{R}^r$ dans $\mathbf{T}$, qui à $x \in \mathbf{R}^r$ associe $L(x) + \mathbf{Z}$, est $\mathbf{Z}^r$-invariante : il existe donc une application continue $\widehat{L} : \mathbf{T}^r \to \mathbf{T}$ telle que, pour tout $x \in \mathbf{R}^r$, on a $L(x) + \mathbf{Z} = \widehat{L}(x + \mathbf{Z}^r)$. Puisque L est surjective, il en est de même de $\widehat{L}$. Remarquons maintenant que pour tout $x \in \mathbf{R}^r$, on a $L(x+a) = L(x) - k_0$, ce qui implique $\widehat{L} \circ T_{\widehat{a}} = \widehat{L}$. Ainsi, $\widehat{L}$ prend une valeur constante sur l'orbite $O(\widehat{x})$ d'un point $\widehat{x}$, ainsi que sur son adhérence. Ceci implique que $\omega(\widehat{x}) \neq \mathbf{T}^r$. La rotation $T_{\widehat{a}}$ n'est pas positivement transitive.

Nous montrerons plus tard que **iii)** implique **i)** en utilisant des arguments de théorie ergodique (en effet $T_{\widehat{a}}$ préserve la mesure de Haar). On peut donner une preuve purement topologique du résultat mais elle est plus compliquée. □

En fait, on a :

PROPOSITION 1.5.12 : *Si les nombres 1, $a_1, \dots, a_r$ sont rationnellement dépendants et si $s+1$ est la dimension du $\mathbf{Q}$-espace vectoriel engendré par 1, $a_1, \dots, a_r$, alors il existe un entier $q \ge 1$*

tel que tout point $\widehat{x}$ appartient à un ensemble positivement et négativement minimal $X_{\widehat{x}}$ qui est l'union de q tores de dimension s.

Les endomorphismes linéaires de T

On considère dans ce paragraphe un endomorphisme $F\ : \widehat{x} \mapsto p\widehat{x}$ de $\mathbf{T}$, où $p \in \mathbf{Z}$. Si $p = 0$ tout point est envoyé sur $\widehat{0}$ et la dynamique est triviale. La dynamique est également triviale si $p = 1$, puisque $F = \mathrm{Id}_{\mathbf{T}}$ et guère moins si $p = -1$ puisque tout point est alors périodique de période 2, sauf $\widehat{0}$ et $\widehat{1/2}$ qui sont fixes. Remarquons que $F^2(x) = p^2\widehat{x}$. L'étude de la dynamique de F peut se déduire en grand partie de celle de F^2. Nous pourrons donc supposer $p \geq 2$ dans ce qui suit.

Proposition 1.5.13 : *Tout point a p antécédents par F et p^n par F^n. De plus l'orbite d'un point $\widehat{x} = x + \mathbf{Z}$ aboutit au point fixe $\widehat{0}$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbf{Z}$ et $n \geq 0$ tels que $x = \frac{k}{p^n}$.*

Preuve. L'équation $p\widehat{x} = \widehat{y}$, où $\widehat{y} = y + \mathbf{Z}$, a p solutions : les projections dans $\mathbf{T}$ des réels $\frac{y}{p}$, $\frac{y}{p} + \frac{1}{p}, \ldots, \frac{y}{p} + \frac{p-1}{p}$. Le reste de la proposition s'en déduit facilement. □

Proposition 1.5.14 : *L'application F a $p-1$ points fixes et plus généralement F^q a $p^q - 1$ points fixes, si $q \geq 1$. De plus,* Per(F) *est dense dans* $\mathbf{T}$.

Preuve. Pour résoudre $p\widehat{x} = \widehat{x}$, on doit résoudre $(p-1)\widehat{x} = \widehat{0}$. On a vu que cette équation a $p-1$ solutions : les projections dans $\mathbf{T}$ des réels 0, $\frac{1}{p-1}, \ldots, \frac{p-2}{p-1}$. La fin de la première assertion s'en déduit immédiatement. Pour montrer que Per(F) est dense dans $\mathbf{T}$, il suffit de remarquer que l'ensemble des points de la forme $x = \frac{k}{p^q-1}$, $q \geq 0$, $k \in \mathbf{Z}$, est dense dans $\mathbf{R}$. □

On en déduit là encore que tout point est non errant puisque les points périodiques sont denses. En fait on a :

Proposition 1.5.15 : *L'application F est topologiquement mélangeante..*

Preuve. On a une situation comparable à celle du décalage de Bernouilli unilatéral. Pour tout point $\widehat{y} \in \mathbf{T}$ l'ensemble $\bigcup_{n\geq 0} F^{-n}(\{\widehat{y}\})$ est dense $\mathbf{T}$. On a même mieux : pour toute partie ouverte U, il existe N tel que $F^{-n}(\{\widehat{y}\}) \cap U \neq \emptyset$, si $n \geq N$. En effet, $F^{-n}(\{\widehat{y}\})$ est formé des projections des p^n points $\frac{y}{p^n}$, $\frac{y}{p^n} + \frac{1}{p^n}, \ldots, \frac{y}{p^n} + \frac{p^n-1}{p^n}$, où $\widehat{y} = y + \mathbf{Z}$. Ainsi tout point de $\mathbf{T}$ est à une distance au plus $\frac{1}{2p^n}$ d'un point de $F^{-n}(\{y\})$. Cette propriété implique bien évidemment que F est topologiquement mélangeante. □

Remarques.

1. Le système dynamique précédent est fortement instable par rapport aux conditions initiales. Deux points peuvent être très proches et avoir des orbites qui divergent. C'est une situation radicalement différente de celle d'une rotation, où deux points proches restent proches au cours du temps sous l'action de la dynamique.

2. L'application

$$\begin{aligned} G\ : S^1 &\to S^1 \\ z &\mapsto z^p \end{aligned}$$

étant conjuguée à F, partage les mêmes propriétés dynamiques.

La proposition 1.5.15 est une conséquence directe des propositions 1.4.9 et 1.5.4, ainsi que du résultat suivant :

Proposition 1.5.16 *L'application F est un facteur du décalage de Bernouilli*

$$\sigma : \{0,\ldots,p-1\}^{\mathbf{N}} \to \{0,\ldots,p-1\}^{\mathbf{N}}.$$

Preuve. On va démontrer que

$$\begin{aligned} H : \{0,\ldots,p-1\}^{\mathbf{N}} &\to \mathbf{T} \\ x &\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{p^{n+1}} + \mathbf{Z} \end{aligned}$$

est une semi-conjugaison entre σ et F.

L'application

$$\begin{aligned} \widetilde{H} : \{0,\ldots,p-1\}^{\mathbf{N}} &\to \mathbf{R} \\ x &\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{p^{n+1}} \end{aligned}$$

est bien définie et son image est l'intervalle $[0,1]$ (car tout point a un développement p-adique). Elle est et continue puisque

$$\begin{aligned} N(x,y) > N \Rightarrow |\widetilde{H}(x) - \widetilde{H}(y)| &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{p-1}{p^{n+1}} \\ &\leq (p-1)p^{-N-2}\frac{1}{1-p^{-1}} = p^{-N-1}. \end{aligned}$$

Remarquons maintenant que pour tout $x \in \{0,\ldots,p-1\}^{\mathbf{N}}$, on a

$$p\widetilde{H}(x) = \widetilde{H}(\sigma(x)) + x_0.$$

Toutes ces propriétés impliquent que H est continue, surjective et vérifie $H \circ \sigma = F \circ H$. □

Les endomorphismes linéaires de $\mathbf{T}^r$

Soit $A : \mathbf{R}^r \to \mathbf{R}^r$ une application linéaire dont la matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^r$ est à coefficients entiers. Puisque $A(\mathbf{Z}^r) \subset \mathbf{Z}^r$, on sait que $A(x) - A(y) \in \mathbf{Z}^r$ si $x - y \in \mathbf{Z}^r$. On en déduit que A relève une application continue $\widehat{A} : \mathbf{T}^r \to \mathbf{T}^r$. Il s'agit d'un *endomorphisme linéaire*, c'est-à-dire d'un endomorphisme continu de $\mathbf{T}^r$. Il en est ainsi par exemple de

$$\begin{aligned} \widehat{A}_1 : \mathbf{T} &\to \mathbf{T} \\ \widehat{x} &\mapsto 2\widehat{x} \end{aligned}$$

et de

$$\begin{aligned} \widehat{A}_2 : \mathbf{T}^2 &\to \mathbf{T}^2 \\ (\widehat{x}_1,\widehat{x}_2) &\mapsto (2\widehat{x}_1+\widehat{x}_2, \widehat{x}_1+\widehat{x}_2) \end{aligned}.$$

Proposition 1.5.17 : *L'endomorphisme $\widehat{A}$ est surjectif si et seulement si* $\det(A) \neq 0$*. Dans ce cas, il préserve la mesure de Haar. De plus, tout point a exactement* $|\det(A)|$ *antécédents.*

L'endomorphisme $\widehat{A}$ est bijectif si et seulement si $\det(A) = \pm 1$. *Dans ce cas $\widehat{A}^{-1}$ est un endomorphisme linéaire.*

Preuve. Dire que l'application $\widehat{A}$ est surjective signifie que pour tout $y \in \mathbf{R}^r$, il existe $x \in \mathbf{R}^r$ et $k \in \mathbf{Z}^r$ tels que $y = A(x) + k$. En d'autres termes, $\widehat{A}$ est surjective si et seulement si $\mathbf{R}^r = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}^r} \mathrm{Im}(A) + k$.

Si A est surjective, c'est-à-dire si $\det(A) \neq 0$, alors $\widehat{A}$ l'est aussi. Si A n'est pas surjective, alors l'espace quotient $\mathbf{R}^r/\mathrm{Im}(A)$ est de dimension au moins 1 et n'est donc pas dénombrable, ce qui exclut que l'on puisse écrire $\mathbf{R}^r/\mathrm{Im}(A) = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}^r} \{k + \mathrm{Im}(A)\}$.

Pour montrer que $\widehat{A}$ préserve la mesure de Haar μ dans le cas surjectif, il suffit de prouver que la mesure $\widehat{A}_*(\mu)$ est invariante par toute rotation. On doit donc prouver que pour tout point $\widehat{b} \in \mathbf{T}^r$, on a $(T_{\widehat{b}})_*(A_*(\mu)) = A_*(\mu)$. Puisque $\widehat{A}$ est surjectif, on peut trouver $\widehat{a}$ tel que $\widehat{A}(\widehat{a}) = \widehat{b}$ et on a donc

$$(T_{\widehat{b}})_*(A_*(\mu)) = (T_{\widehat{b}} \circ A)_*(\mu) = (A \circ T_{\widehat{a}})_*(\mu) = A_*((T_{\widehat{a}})_*(\mu)) = A_*(\mu).$$

Montrons maintenant que tout point a exactement $|\det(A)|$ antécédents. Observons d'abord que tous les points ont le même nombre d'antécédents puisque $\widehat{A}$ est un endomorphisme. Notons p ce nombre et considérons le “cube” $Y = [-\delta, \delta]^r$ ainsi que le polyèdre $X = A^{-1}(Y)$. Si $\delta > 0$ est petit, Y se projette injectivement sur un ensemble borélien $\widehat{Y}$ de mesure $(2\delta)^r$ et X sur un ensemble borélien $\widehat{X}$ de mesure $|\det(A)|^{-1}(2\delta)^r$. L'ensemble $\widehat{A}^{-1}(\widehat{Y})$ est la réunion disjointe de p translatés de $\widehat{X}$. Puisque $\widehat{A}$ préserve la mesure de Lebesgue, on en déduit que $p = |\det(A)|$.

On en déduit bien sûr que $\det(A) = \pm 1$ si $\widehat{A}$ est bijectif. Dans ce cas, la matrice de A^{-1} dans la base canonique est à coefficients entiers et relève un endomorphisme linéaire de $\mathbf{T}^r$ qui n'est rien d'autre que $\widehat{A}^{-1}$. □

Proposition 1.5.18 : *Si l'une des valeurs propres de A est racine de l'unité, alors il existe $n \geq 1$ tel que $\widehat{A}^n$ a une infinité de points fixes. Sinon, pour tout $n \geq 1$, l'ensemble* $\mathrm{Fix}(\widehat{A}^n)$ *est fini et a* $|\det(A^n - \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^r})|$ *éléments.*

Preuve. Les points fixes de $\widehat{A}^n$ sont les antécédents de $\widehat{0}$ par l'endomorphisme $\widehat{A}^n - \mathrm{Id}_{\mathbf{T}^r}$ et celui-ci est relevé par $A^n - \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^r}$. □

Remarque. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sont les valeurs propres de A, alors

$$|\det(A^n - \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^r})| = \prod_{i=1}^{r} |\lambda_i^n - 1|.$$

Ainsi, on a

$$\log(\sharp \mathrm{Fix}(\widehat{A}^n)) = \sum_{i=1}^{r} \log(|\lambda_i^n - 1|).$$

Dans le cas où aucune valeur propre n'est de module 1, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log(\sharp \mathrm{Fix}(\widehat{A}^n)) = \sum_{i \in I} \log(|\lambda_i|),$$

où $i \in I$ si et seulement si $|\lambda_i| > 1$.

Proposition 1.5.19 : *Tout point $\widehat{x}$ de $\mathbf{Q}^r/\mathbf{R}^r$ est périodique ou prépériodique (c'est-à-dire que $\tilde{x}$ n'est pas périodique mais qu'il existe $n \geq 1$ tel que $\widehat{A}^n(\widehat{x})$ est périodique). Si les valeurs propres de A ne sont pas racines de l'unité, alors tout point périodique appartient à $\mathbf{Q}^r/\mathbf{R}^r$. Si A est surjectif, alors les points périodiques sont denses.*

Preuve. Pour tout $q \geq 1$, l'ensemble $\frac{1}{q}\mathbf{Z}^r$ est positivement invariant par A. On en déduit que l'ensemble $\left(\frac{1}{q}\mathbf{Z}^r\right)/\mathbf{Z}^r$ est positivement invariant par $\widehat{A}$. Puisqu'il est fini, tout point $\widehat{x} \in \left(\frac{1}{q}\mathbf{Z}^r\right)/\mathbf{Z}^r$ est périodique ou prépériodique. Pour conclure, remarquons que

$$\mathbf{Q}^r/\mathbf{Z}^r = \bigcup_{q\geq 1}\left(\frac{1}{q}\mathbf{Z}^r\right)/\mathbf{Z}^r.$$

Notons également que si A est surjectif et si q est un entier premier à $\det A$ (par exemple un nombre premier qui ne divise pas $\det A$), alors la restriction de $\widehat{A}$ à $\left(\frac{1}{q}\mathbf{Z}^r\right)/\mathbf{Z}^r$ est un morphisme injectif de ce groupe fini et donc un automorphisme. En effet, il existe $u \in \mathbf{Z}$ et $v \in \mathbf{Z}$ tel que $uq + v\det(A) = 1$. Ainsi, si $x \in \dfrac{1}{q}\mathbf{Z}^r$ vérifie $A(x) \in \mathbf{Z}$, on a $x \in (\det(A))^{-1}\mathbf{Z}^r$ et donc $x = uqx + v\det(A)x \in \mathbf{Z}^r$. On en déduit que tout point de $\left(\frac{1}{q}\mathbf{Z}^r\right)/\mathbf{Z}^r$ est périodique, puis que l'ensemble des points périodiques est dense.

Supposons maintenant que $\widehat{x}$ soit périodique et écrivons $\widehat{x} = x + \mathbf{Z}^r$, où $x \in \mathbf{R}^r$. Il existe $k \geq 1$ et $p \in \mathbf{Z}^r$ tels que $A^k(x) = x + p$. Si les valeurs propres de A ne sont pas racines de l'unité, alors $A^k - \mathrm{Id}_r$ est bijective et les solutions de $A^k(x) - x = p$ appartiennent à $\mathbf{Q}^r$. □

1.6 Mesures invariantes des systèmes dynamiques topologiques.

Une application continue $T : X \to X$ sur un espace métrique X n'admet pas nécessairement de mesure borélienne invariante. Il en est ainsi, par exemple, de la translation $n \mapsto n+1$ sur $\mathbf{N}$. De même, elle peut admettre une mesure infinie invariante, mais pas de mesure finie, comme la translation $k \mapsto k+1$ sur $\mathbf{Z}$ qui laisse invariante la mesure de comptage. Nous verrons cependant que dans le cas où X est compact et métrisable, toute application continue $T : X \to X$ admet au moins une mesure de probabilité borélienne invariante. Rappelons que le théorème de représentation de Riesz nous donne une bijection entre l'ensemble des mesures de probabilité boréliennes et l'ensemble des formes linéaires positives L sur $C(X, \mathbf{C})$ telles que $L(\mathbf{1}) = 1$. Ici $\mathbf{1}$ désigne la fonction constante égale à 1 et $C(X, \mathbf{C})$ représente l'espace vectoriel des fonctions continues $f : X \to \mathbf{C}$. Dire que L est positive signifie que $L(f) \geq 0$ si f est à valeurs dans $[0, +\infty[$. Si on munit $C(X, \mathbf{C})$ de la norme $\|f\| = \sup_{x\in X}|f(x)|$, on sait alors que L est continue. L'espace $C(X, \mathbf{C})^*$ des formes linéaires continues $L : C(X, \mathbf{C}) \to \mathbf{C}$ peut-être muni de la *topologie forte* définie par la norme

$$\|L\| = \sup_{f\in C(X,\mathbf{C}), \|f\|\leq 1} |L(f)|.$$

Il est également muni de la *topologie faible** définie ainsi : une suite $(L_n)_{n\geq 0}$ converge vers L si $\lim_{n\to+\infty} L_n(f) = L(f)$ pour tout $f \in C(X, \mathbf{C})$. Un résultat fondamental sur cette topologie est que la boule unité $\{L \in C(X, \mathbf{C})^* \mid \|L\| \leq 1\}$ est compacte (voir exercice 34). Remarquons également que l'espace $M(X)$ des mesures de probabilité boréliennes est, via l'identification précédente, une partie convexe de $C(X, \mathbf{C})^*$, fermée pour la topologie faible* (via la représentation de Riesz), et qu'elle est contenue dans la boule unité puisque $|\int f\, d\mu| \leq \int |f|\, d\mu \leq \|f\|$ pour toute fonction $f \in C(X, C)$. Ainsi, l'ensemble $M(X)$, muni de la topologie faible*, est compact. Il est également métrisable car X est métrisable et $C(X, \mathbf{C})$ est donc séparable.

Commençons par le théorème de Krylov-Bogolyubov, qui est un cas particulier du théorème de Markov-Kakutani.

Théorème 1.6.1 : *Si X est un espace topologique compact métrisable, toute application continue $T\ : X \to X$ laisse invariant au moins une mesure de probabilité borélienne. De plus, l'espace $M_T(X)$ des mesures invariantes est une partie convexe fermée de $M(X)$.*

Preuve. On veut prouver que l'application

$$\begin{aligned} T_*\ : M(X) &\to M(X) \\ \mu &\mapsto T_*(\mu) \end{aligned}$$

a un point fixe. Cette application est continue pour la topologie faible*. En effet, si $\lim_{n\to+\infty} \mu_n = \mu$, alors pour tout $f \in C(X, \mathbf{C})$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int f\, dT_*(\mu_n) = \lim_{n\to+\infty} \int f \circ T\, d\mu_n = \int f \circ T\, d\mu = \int f\, dT_*(\mu).$$

Elle est également affine (elle envoie barycentre sur barycentre). Fixons $\mu \in M(X)$ et posons

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (T_*)^i(\mu).$$

L'espace $M(T)$ étant compact pour la topologie faible* et métrisable, on peut extraire une suite $(\mu_{n_m})_{m\geq 0}$ qui converge pour cette topologie vers une mesure μ'. Remarquons que

$$T_*(\mu_{n_m}) - \mu_{n_m} = \frac{1}{n_m}(T_*)^{n_m}(\mu) - \mu$$

et donc que

$$\|T_*(\mu_{n_m}) - \mu_{n_m}\| \leq \frac{2}{n_m}.$$

Cette suite converge donc fortement (et donc également faiblement) vers 0 dans $C(X, \mathbf{C})^*$. Mais elle converge faiblement vers $T_*(\mu') - \mu'$. On en déduit que $T_*(\mu') = \mu'$.

L'ensemble des mesures invariantes est fermé car T_* est continue, et convexe car T_* est affine.
□

Le théorème ne nous dit rien, bien sûr, sur ces mesures invariantes. Elles peuvent être portées sur des orbites périodiques. Nous allons maintenant introduire une nouvelle propriété concernant les systèmes dynamiques topologiques.

Proposition 1.6.2 : *Soit X un espace topologique compact et $T\ : X \to X$ une transformation continue. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *l'ensemble $M_T(X)$ est réduit à un point ;*

ii) *pour tout $f \in C(X, \mathbf{C})$ et tout $x \in X$, la suite* $\dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i(x)$ *converge et sa limite ne dépend pas de x;*

iii) *pour tout $f \in C(X, \mathbf{C})$, la suite* $\dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i$ *converge uniformément vers une fonction constante.*

Si ces propriétés sont vérifiées, on dira que le système est uniquement ergodique.

Preuve. Expliquons d'abord pourquoi **i)** implique **iii)**. Nous raisonnerons par l'absurde. Soit μ l'unique mesure de probabilité invariante. Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$, une suite d'entiers $(n_m)_{m \geq 0}$ et une suite $(x_m)_{m \geq 0}$ de points de X tels que $\lim_{m \to +\infty} n_m = +\infty$ et

$$\left| \frac{1}{n_m} \sum_{i=0}^{n_m - 1} f \circ T^i(x_m) - \int f \, d\mu \right| \geq \varepsilon.$$

Notons δ_{x_m} la mesure de Dirac en x_m et posons $\mu_m = \dfrac{1}{n_m} \displaystyle\sum_{i=0}^{n_m - 1} T_*^i \delta_{x_m}$. L'ensemble $M(T)$ étant compact pour la topologie faible*, on peut supposer que la suite $(\mu_m)_{m \geq 0}$ converge faiblement vers une mesure de probabilité μ'. Ici encore, on a

$$T_*(\mu_m) - \mu_m = \frac{1}{n_m} \left(T_*^{n_m}(\delta_{x_m}) - \delta_{x_m} \right)$$

et

$$\|T_*(\mu_m) - \mu_m\| \leq \frac{2}{n_m},$$

ce qui implique que μ' est invariante. Remarquons maintenant que $\mu' \neq \mu$ car

$$\int f \, d\mu' = \lim_{m \to +\infty} \int f \, d\mu_m \neq \int f \, d\mu.$$

Ceci contredit **i)**.

Il reste à prouver que **ii)** implique **i)**, puisque **iii)** implique trivialement **ii)**. Fixons $x \in X$. Pour tout $f \in C(X, \mathbf{C})$, posons

$$L(f) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i(x),$$

où x est un point quelconque de X. On obtient une forme linéaire positive L sur $C(X, \mathbf{C})$ qui envoie $\mathbf{1}$ sur 1. Pour montrer que $M_T(X)$ est réduit à un point, il suffit de montrer que $L(f) = \int f \, d\mu$ pour tout $\mu \in M_T(X)$. Puisque $|\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i(x)| \leq \|f\|$, on peut utiliser le théorème de convergence dominée de Lebesque. On a

$$L(f) = \int \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i(x) \, d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i(x) \, d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int f \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

□

Remarque. La propriété d'unique ergodicité est stable par conjugaison. Plus généralement si X et Y sont des espaces topologiques compacts métrisables, si $T : X \to X$ est uniquement ergodique et si $S : Y \to Y$ est un facteur de T, alors S est uniquement ergodique.

Exemples

1. Un endomorphisme linéaire surjectif de $\mathbf{T}^r$ n'est pas uniquement ergodique car il fixe 0 et préserve la mesure de Haar.

2. Les décalages ne sont pas uniquement ergodiques car ils ont une infinité d'orbites périodiques.

3. Une rotation de $\mathbf{T}$ d'angle rationnel n'est pas uniquement ergodique car elle a une infinité d'orbites périodiques.

4. Une rotation $T_{\widehat{a}} : \mathbf{T}^r \to \mathbf{T}^r$, où $\widehat{a} = a + \mathbf{Z}^r$ et $a = (a_1, \ldots, a_r) \in \mathbf{R}^r$, telle que 1, a_1,..., a_r ne sont pas rationnellement indépendants n'est pas uniquement ergodique. En effet, chaque ensemble de niveau X de la fonction $\widehat{L}$ introduite dans la preuve de la proposition 1.5.11, est compact et invariant par $T_{\widehat{a}}$. Il contient donc le support d'une mesure $\mu \in M_{T_{\widehat{a}}}(\mathbf{T}^r)$, par application du théorème de Krylov-Bogolyubov à la restriction $T_{\widehat{a}}|_X$.

5. Une rotation de $\mathbf{T}$ d'angle irrationnel est uniquement ergodique, plus généralement une rotation $T_{\widehat{a}} : \mathbf{T}^r \to \mathbf{T}^r$, où $\widehat{a} = a + \mathbf{Z}^r$ et $a = (a_1, \ldots, a_r) \in \mathbf{R}^r$, telle que 1, a_1,..., a_r sont rationnellement indépendants. En effet, si $\mu \in M(\mathbf{T}^r)$ est invariante par $T_{\widehat{a}}$, alors μ est invariante par tout $T_{n\widehat{a}}$, $n \geq 0$. Puisque la suite $(n\widehat{a})_{n\geq 0}$ est dense dans $\mathbf{T}^r$, on en déduit que μ est invariante par tout $T_{\widehat{b}}$, $b \in \mathbf{T}^r$. Or, la mesure de Haar est la seule mesure de probabilité borélienne vérifiant cette propriété.

Nous allons conclure en donnant un exemple intéressant de système dynamique uniquement ergodique. Nous en déduirons une propriétés d'équirépartition vérifiée par certaines suites arithmétiques. Nous dirons qu'une suite réelle $(x_n)_{n\geq 0}$ est *équirépartie modulo un*, si pour tout intervalle $[a, b]$ de $[0, 1]$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sharp\{k < n \,|\, x_k - [x_k] \in [a, b]\} = b - a.$$

Si on pose $\widehat{x}_n = x_n + \mathbf{Z}$ et $\mu_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k<n} \delta_{\widehat{x}_k}$, ceci signifie que la suite $(\mu_n)_{n\geq 1}$ converge vers la mesure de Haar pour la topologie faible*. De façon équivalente, une suite de réels $(x_n)_{n\geq 0}$ est équirépartie modulo un, si pour toute fonction continue $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, périodique de période 1, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \int_0^1 f(x)\, dx.$$

Puisque les polynômes trigonométriques sont denses, pour la topologie de la convergence uniforme, dans l'espace des fonctions continues périodiques de période 1, pour qu'une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ soit équirépartie modulo un, il suffit qu'elle vérifie le *critère de Weyl* : pour tout entier $m \neq 0$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{2i\pi m x_k} = 0.$$

Ainsi par exemple, on sait que pour tout nombre irrationnel a, la suite $(na)_{n\geq 0}$ est équirépartie. On vérifie aisément que cette suite vérifie le critère de Weyl, mais on peut également invoquer l'unique ergodicité de la rotation $\widehat{x} \mapsto \widehat{x} + \widehat{a}$, où $\widehat{a} = a + \mathbf{Z}$.

Proposition 1.6.3 : *Soit $\widehat{a} = a + \mathbf{Z} \notin \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, alors l'homéomorphisme*

$$\begin{aligned} F &: \mathbf{T}^r \to \mathbf{T}^r \\ (\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \ldots, \widehat{x}_r) &\mapsto (\widehat{x}_1 + \widehat{a}, \widehat{x}_1 + \widehat{x}_2, \ldots, \widehat{x}_{r-1} + \widehat{x}_r) \end{aligned}$$

est uniquement ergodique.

Corollaire 1.6.4 : *Soit P un polynôme réel non constant à coefficient directeur irrationnel. Alors la suite $P(n)_{n\geq 0}$ est équirépartie modulo* 1.

Preuve de la proposition 1.6.3. L'homéomorphisme F, obtenu en composant la translation $\widehat{x} \mapsto \widehat{x}+\widehat{a}$ et l'automorphisme $\widehat{A}$ engendré par $A : (x_1, \ldots, x_r) \mapsto (x_1, x_1+x_2, \ldots, x_{r-1}+x_r)$, préserve la mesure de Haar. Nous voulons montrer que c'est la seule mesure invariante. Définissons, pour tout $k \in \mathbf{Z}^r$, une fonction $e_k \ : \mathbf{T}^r \to \mathbf{C}$ en posant

$$e_k(x + \mathbf{Z}^r) = e^{2i\pi\langle k,x\rangle}.$$

Notons que

$$e_k(F(x + \mathbf{Z}^r)) = e^{2i\pi(k_1 a+\langle k,\, A(x)\rangle)}) = e^{2i\pi k_1 a} e^{2i\pi\langle A^t(k),\, x\rangle}$$

et donc que

$$e_k \circ F = e^{2i\pi k_1 a} e_{A^t(k)}.$$

Donnons nous une mesure de probabilité invariante μ, et, pour tout $k \in \mathbf{Z}^r$, considérons le k-ème coefficient de Fourier $c_k(\mu) = \int_{\mathbf{T}^r} e_{-k}\, d\mu$. L'invariance de μ se traduit par l'égalité

$$c_{(k_1,\ldots,k_r)}(\mu) = \int_{\mathbf{T}^r} e_{-k}\, d\mu = \int_{\mathbf{T}^r} e_{-k} \circ F\, d\mu = e^{-2i\pi k_1 a} c_{(k_1+k_2,\ldots,k_{r-1}+k_r,k_r)}(\mu).$$

Il nous faut prouver que $c_k(\mu) = 0$ si $k \neq 0$. L'égalité au-dessus nous dit que c'est le cas si $k = (k_1, 0, \ldots, 0)$ puisque $a \notin \mathbf{Q}$. Montrons par récurrence sur s que c'est le cas si $k = (k_1, \ldots, k_s, 0, \ldots, 0)$. Supposons donc que ceci est vrai pour $s-1$. Fixons $k = (k_1, \ldots, k_s, 0, \ldots, 0)$, avec $k_s \neq 0$. Remarquons que, pour tout $n \geq 0$, la fonction $e_k \circ F^n$ s'écrit

$$e_k \circ F^n = \lambda_n e_{k(n)},$$

où $|\lambda_n| = 1$ et où

$$k(n) = (A^t)^n(k) = (k_1(n), \ldots, k_{s-1}(n), k_s, 0, \ldots, 0).$$

Remarquons également que $k_{s-1}(n) = k_{s-1} + nk_s$ et donc que si $n' \neq n$, alors $k(n') \neq k(n)$. Ceci implique, grâce à l'hypothèse de récurrence que

$$\int_{\mathbf{T}^r} (e_k \circ F^n)(\overline{e_k \circ F^{n'}})\, d\mu = \int_{\mathbf{T}^r} \lambda_n \overline{\lambda_{n'}} e_{k(n)-k(n')}\, d\mu = \lambda_n \overline{\lambda_{n'}} c_{k(n')-k(n)}(\mu) = 0.$$

Ainsi la famille $(e_k \circ F^n)_{n\geq 0}$ est orthonormée dans $L^2(\mu)$. On en déduit, par l'inégalité de Bessel, que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\langle e_0, e_k \circ F^n\rangle_{L^2(\mu)}|^2 \leq \|e_0\|^2_{L^2(\mu)} = 1.$$

Or, on a

$$\langle e_0, e_k \circ F^n\rangle_{L^2(\mu)} = \int_{\mathbf{T}^r} \overline{e_k \circ F^n}\, d\mu = \int_{\mathbf{T}^r} \overline{e_k}\, d\mu = c_k(\mu),$$

ce qui implique que $c_k(\mu) = 0$. □

Preuve du corollaire 1.7.4. On écrit $P(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_r X^r$, où a_r est irrationnel. On définit alors une suite $(P_i)_{0\leq i\leq r}$ de polynômes par la relation de récurrence descendante

$$P_i(X) = P_{i+1}(X + 1) - P_{i+1}(X),$$

et la condition $P_r = P$. Le polynôme P_i est de degré i et de coefficient directeur

$$r(r-1), \dots (i+1) a_r.$$

Posons

$$\widehat{x}^n = (P_1(n), P_2(n), \dots, P_r(n)) + \mathbf{Z}^r$$

et remarquons que $\widehat{x}^{n+1} = F(\widehat{x}^n)$, où

$$\begin{aligned} F \ : \mathbf{T}^r &\to \mathbf{T}^r \\ (\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \dots, \widehat{x}_r) &\mapsto (\widehat{x}_1 + \widehat{a}, \widehat{x}_1 + \widehat{x}_2, \dots, \widehat{x}_{r-1} + \widehat{x}_r) \end{aligned}$$

et $\widehat{a} = r!\, a_r$. Pour toute fonction continue $\varphi \ : \mathbf{T} \to \mathbf{C}$, on peut définir une fonction continue $\Phi \ : \mathbf{T}^r \to \mathbf{C}$ en posant $\Phi(\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_r) = \varphi(\widehat{x}_r)$. Puisque F est uniquement ergodique, on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(P(k) + \mathbf{Z}) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \Phi(\widehat{x}^k) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \Phi(F^k(\widehat{x}^0)) \\ &= \int_{\mathbf{T}^r} \Phi(\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_r)\, d\widehat{x}_1 \dots d\widehat{x}_r \\ &= \int_{\mathbf{T}} \varphi(\widehat{x}_r)\, dx_r. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite $P(n)_{n\geq 0}$ est équirépartie modulo 1. □

2.1 Systèmes dynamiques mesurés

On va s'intéresser dans ce chapitre à un aspect différent des systèmes dynamiques. Si X est un ensemble et $\mathcal{B}$ une σ-algèbre sur X, toute application mesurable $T\ : X \to X$ définit un *système dynamique mesurable*. Rappelons que si μ est une mesure sur $\mathcal{B}$, on obtient une autre mesure $T_*(\mu)$ en posant :

$$T_*(\mu)(A) = \mu(T^{-1}(A)) \text{ pour tout } A \in \mathcal{B}.$$

Nous ne considèrerons par la suite que des mesures σ-finies, c'est-à-dire telles que X puisse s'écrire comme réunion dénombrable de parties mesurables de mesure finie. Notons que $T_*(\mu)$ est une mesure de probabilité si c'est le cas de μ. Considérons l'espace mesuré $(X, \mathcal{B}, \mu)$. Un *système dynamique mesuré* sera défini par une application mesurable $T\ : X \to X$ préservant μ, c'est-à-dire telle que

$$\mu(A) = \mu(T^{-1}(A)) \text{ pour tout } A \in \mathcal{B}.$$

Si T est inversible, on obtient un système dynamique inversible. Très souvent, l'inversibilité n'a lieu que presque partout, ce qui est suffisant pour avoir un système dynamique inversible : il existe une application mesurable $S\ : X \to X$, telle que $S \circ T(x) = T \circ S(x)$ pour presque tout point x. De façon équivalente, il existe $Y \in \mathcal{B}$ telle que $\mu(X \setminus Y) = 0$ et telle que T induit une bijection mesurable en restriction à Y.

Notons qu'une application mesurable $T\ : X \to X$ peut laisser invariant plusieurs mesures sur $\mathcal{B}$ et donc définir plusieurs systèmes dynamiques mesurés.

Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un système dynamique mesuré. Si $f = \sum_{1 \le i \le n} \lambda_i \chi_{A_i}$ est une fonction étagée, c'est-à-dire une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques d'ensembles de mesure finie disjoints deux à deux, alors pour tout $p \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}
\int f^p \circ T \, d\mu &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^p \int \chi_{A_i} \circ T \, d\mu \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^p \int \chi_{T^{-1}(A_i)} \, d\mu \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^p \mu(T^{-1}(A_i)) \, d\mu \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^p \mu(A_i) \, d\mu = \int f^p \, d\mu
\end{aligned}$$

.

L'ensemble des fonctions étagées étant dense dans $L^p(\mu)$, on en déduit que pour tout $f \in L^p(\mu)$, l'application $f \circ T$ appartient à $L^p(\mu)$ et vérifie $\int f^p \circ T \, d\mu = \int f^p \, d\mu$. On obtient ainsi une autre façon de définir l'invariance de la mesure. Un cas particulièrement intéressant est celui où $p = 2$. L'opérateur

$$\begin{aligned}
U_T\ : L^2(\mu) &\to L^2(\mu) \\
f &\mapsto f \circ T
\end{aligned}$$

est alors une isométrie $L^2(\mu)$: on a

$$\langle U_T(f), U_T(g)\rangle = \int (f\circ T)(\overline{g}\circ T)\,d\mu = \int f\overline{g}\,d\mu = \langle f,g\rangle.$$

De plus, si T est inversible, alors U_T est un opérateur unitaire.

Comme dans le cas d'un système topologique, on peut parler de sous-système et de facteur. La formulation est cependant différente dans le contexte des systèmes dynamiques mesurés. On dira que $A\in\mathcal{B}$ est invariant si $T^{-1}(A)=A$. Il s'agit d'une condition plus forte que la condition $T(A)\subset A$ qui apparaît quand on définit un sous-système dans le cadre topologique. C'est la condition d'invariance adéquate dans le cas mesuré car elle implique que

$$T|_A\ : (A,\mathcal{B}_A,\mu|_{\mathcal{B}_A}) \to (A,\mathcal{B}_A,\mu|_{\mathcal{B}_A})$$

est un système dynamique mesuré, où

$$\mathcal{B}_A = \{A\cap B \,|\, B\in\mathcal{B}\} = \{B\in\mathcal{B}\,|\, B\subset A\}.$$

Définissons maintenant la notion de facteur dans ce nouveau cadre. Un système dynamique mesuré $(Y,\mathcal{C},\nu,S)$ est un facteur de $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ s'il existe une application mesurable $H\ : X\to Y$ telle que $H\circ T = S\circ H$ presque partout et $H_*(\mu)=\nu$, c'est-à-dire telle que

$$\nu(A) = \mu(T^{-1}(A)) \ \text{pour tout}\ A\in\mathcal{C}.$$

Si H est inversible (à ensembles négligeables près), les deux systèmes dynamiques sont conjugués.

Exemples

1. L'application $T : k\to k+1$ sur $\mathbf{Z}$ induit un système dynamique mesuré si $\mathbf{Z}$ est muni de mesure de comptage.

2. Si une application continue $T\ : X\to X$ sur un espace topologique a une orbite périodique O, la mesure de probabilité équidistribuée sur O est une mesure borélienne préservée par T.

Rotations et endomorphismes du tore

Si on munit $\mathbf{T}^r$ de la tribu borélienne et de la mesure de Haar, alors toute rotation du tore $T_{\widehat{a}}\ : \mathbf{T}^r\to\mathbf{T}^r$ définit un système dynamique mesuré inversible. De même, tout endomorphisme linéaire surjectif $\widehat{A}\ : \mathbf{T}^r\to\mathbf{T}^r$ définit un système dynamique mesuré.

Décalage de Bernouilli

Le décalage $\sigma\ : A^{\mathbf{N}}\to A^{\mathbf{N}}$ défini à partir d'un alphabet fini a beaucoup d'orbites périodiques et laisse donc invariant un grand nombre de mesures boréliennes de probabilité. Il admet d'autres mesures, plus intéressantes, en particulier les *mesures produits* et les *mesures de Markoff*.

Donnons-nous une famille $(p_a)_{a\in A}$ de nombres positifs tels que $\sum_{a\in A} p_a = 1$. Le théorème d'extension de Kolmogorov nous dit qu'il existe une unique mesure borélienne de probabilité μ sur $A^{\mathbf{N}}$ telle que pour tout cylindre $C_w^{n_0}$, où $w=(w_0,\dots,w_{m-1})$, on a

$$\mu(C_w^{n_0}) = \prod_{0\le n<m} p_{w_n}.$$

Remarquons que pour tout cylindre $C_w^{n_0}$, on a

$$\mu(\sigma^{-1}(C_w^{n_0})) = \mu(C_w^{n_0+1}) = \mu(C_w^{n_0}),$$

ce qui par unicité de l'extension, implique que σ préserve μ.

Un cas particulier est le cas où tous les p_α sont égaux, on parle alors de *mesure équidistribuée.*

PROPOSITION 3.1.1 : *Le décalage de Bernouilli, muni de la mesure équidistribuée est conjugué au système dynamique mesuré*

$$\begin{aligned} F\ :\ &(\mathbf{T},\nu) \to (\mathbf{T},\nu) \\ &\widehat{x} \mapsto p\widehat{x} \end{aligned},$$

où ν est la mesure de Haar et $p = \sharp A$.

Preuve. En effet, on peut supposer que $A = \{0,\ldots,p-1\}$ et considérer la semi-conjugaison (au sens topologique)

$$\begin{aligned} H\ :\ &\{0,\ldots,p-1\}^{\mathbf{N}} \to \mathbf{T} \\ &x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{p^{n+1}} + \mathbf{Z} \end{aligned}.$$

On vérifie aisément que $\nu(H(C_w^{n_0})) = \mu(C_w^{n_0})$ pour tout cylindre $C_w^{n_0}$. Or, en dehors des points p-adiques qui ont deux antécédents et qui sont en nombre dénombrable, tous les autres points ont un unique antécédent. Le complémentaire X des points p-adiques est de mesure de Haar totale et vérifie $F^{-1}(X) = X$. La restriction de H à $H^{-1}(X)$ est une bijection de $H^{-1}(X)$ sur X. □

Introduisons maintenant la classe plus générale des mesures de Markov. On supposera pour faciliter les notations que $A = \{1,\ldots,p\}$. Soit $M = (M_{i,j})_{i,j}$ une matrice carrée d'ordre p qui est *stochastique*, c'est-à-dire une matrice à coefficients positifs vérifiant $\sum_{j=1}^{p} M_{i,j} = 1$, pour tout $i \in \{1,\ldots,p\}$.

PROPOSITION 3.1.2 : *Il existe au moins un vecteur $v = (v_1,\ldots,v_p)$ à coefficients positifs vérifiant $\sum_{i=1}^{p} v_i = 1$ et tel que $vM = v$. Ce vecteur est unique dans le cas où il existe une puissance de M dont les coefficients sont tous strictement positifs. Si on écrit $M^n = (M_{i,j}^n)_{i,j}$, on a alors*

$$\lim_{n\to+\infty} M_{i,j}^n = v_j.$$

Preuve. Commençons par montrer l'existence de v. On cherche ce vecteur comme point fixe de l'endomorphisme L dont M^t est la trace dans la base canonique. Remarquons que L laisse invariant l'hyperplan affine H d'équation $x_1 + \ldots + x_p = 1$ puisque

$$\sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{p} M_{i,j}^t x_j\right) = \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{p} M_{j,i} x_j\right) = \sum_{j=1}^{p} x_j \left(\sum_{i=1}^{p} M_{j,i}\right) = \sum_{j=1}^{p} x_j.$$

Il envoie donc la partie compacte convexe

$$C = \{(x_1,\ldots,x_p) \in H \,|\, x_i \geq 0, \text{ pour tout } i \in \{1,\ldots,p\}\}$$

dans elle même. Fixons $w \in C$ et définissons

$$w_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} L^k(w).$$

Remarquons que

$$\|L(w_n) - w_n\| = \left\| \frac{1}{n}(L^n(w) - w) \right\| \le \frac{1}{n}\mathrm{diam}(C).$$

Ceci implique que toute valeur d'adhérence v de la suite $(w_n)_{n\ge 1}$ est fixe par L.

Montrons maintenant l'unicité de v dans le cas où il existe une puissance de M dont les coefficients sont strictement positifs (c'est un cas particulier du théorème de Perron-Frobenius). En effet si v et v' sont deux vecteurs dans C qui sont fixes par L, la droite affine passant par v et v' est formée de points fixes et contient un point de la frontière de C. Mais si les coefficients de M^n sont strictement positifs, l'image par L^n de tout point de C est inclus dans l'intérieur (relatif) de C. On déduit pour les mêmes raisons qu'il n'y a pas d'autre point périodique que ce point fixe.

La i-ème ligne de M^n est égale à la i-ème colonne de $(M^t)^n$, c'est-à-dire à l'image par L^n du i-ème vecteur de la base canonique de $\mathbf{R}^n$. Ainsi pour montrer que $\lim_{n\to+\infty} M^n_{i,j} = v_j$, il suffit de montrer que pour tout $w \in C$, on a $\lim_{n\to+\infty} L^n(w) = v$ et donc de prouver que $\bigcap_{n\ge 0} L^n(C) = \{v\}$. Chaque ensemble $L^n(C)$ est un polyèdre de dimension $< p$ ayant au plus p sommets. On en déduit que $\bigcap_{n\ge 0} L^n(C)$ est également un polyèdre ayant au plus p sommets. Puisque $\bigcap_{n\ge 0} L^n(C)$ est invariant par L, cette application induit une permutation sur l'ensemble des sommets. Les sommets tous fixés par une même puissance de L. Ceci n'est possible que s'il n'y a qu'un seul sommet, égal à v, c'et à dire si $\bigcap_{n\ge 0} L^n(C)$ est réduit à v. □

Si v vérifie $vM = M$, le théorème d'extension de Caratheodory nous dit qu'il existe une unique mesure borélienne de probabilité μ telle que pour tout $w = (w_0, \dots, w_{m-1}) \in \{1, \dots, p\}^m$ et tout $n_0 \in \mathbf{N}$, on a

$$\mu(C_w^{n_0}) = v_{w_0} \left(\prod_{k=0}^{m-2} M_{w_k, w_{k+1}} \right).$$

En effet si on écrit

$$iw = (i, w_0, \dots, w_{m-1}), \;\; wi = (w_0, \dots, w_{m-1}, i),$$

pour $w = (w_0, \dots, w_{m-1}) \in \{1, \dots, p\}^m$, et $i \in \{1, \dots, p\}$, la formule précédente implique que pour tout $n_0 \in \mathbf{N}$, on a

$$\sum_{i=1}^{p} \mu(C_i^{n_0}) = 1$$

et que pour tout $w = (w_0, \dots, w_{m-1}) \in \{1, \dots, p\}^m$ et tout $n_0 \in \mathbf{N}$, on a

$$\mu(C_w^{n_0}) = \sum_{i=1}^{p} \mu(C_{iw}^{n_0-1}) = \sum_{i=1}^{p} \mu(C_{wi}^{n_0})$$

(la première égalité de la ligne précédente est due au fait que $vM = v$, la seconde au fait que M est une matrice stochastique). Là encore, on a

$$\mu(\sigma^{-1}(C_w^{n_0})) = \mu(C_w^{n_0+1}) = \mu(C_w^{n_0}),$$

ce qui prouve que μ est invariante par σ.

On construit de façon équivalente des mesures produits ou des mesures de Markov sur $A^{\mathbf{Z}}$ qui sont invariantes par le décalage bilatéral.

Application de Gauss

Concluons cette section par un dernier exemple, propre au cas mesuré. Définissons sur $[0,1[$ l'application

$$T\ : x \mapsto \left\{\frac{1}{x}\right\} = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right],$$

où $\{y\}$ est la partie fractionnaire et $[y]$ la partie entière d'un réel y. Elle n'est pas définie en 0. On a donc

$$x = \frac{1}{a(x)+T(x)},$$

où $a(x) = [1/x]$. Pour tout $k \geq 1$, l'ensemble $a^{-1}(\{k\})$ coïncide avec l'intervalle $]1/(k+1), 1/k]$. L'application T induit une bijection strictement décroissante de $]1/(k+1), 1/k]$ sur $[0,1[$.

Proposition 3.1.3 : *La transformation T préserve la* mesure de Gauss *de densité*

$$d\mu = \frac{1}{\ln 2}\frac{dx}{1+x}.$$

Preuve. Il suffit de vérifier que pour tout intervalle $[a,b] \subset [0,1[$, on a $\mu(T^{-1}([a,b]) = \mu([a,b])$. Or on a

$$\begin{aligned}
\mu(T^{-1}([a,b])) &= \frac{1}{\ln 2}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\frac{1}{b+k}}^{\frac{1}{a+k}}\frac{1}{1+t}dt \\
&= \frac{1}{\ln 2}\sum_{k=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{a+k}) - \ln(1+\frac{1}{b+k}) \\
&= \frac{1}{\ln 2}\sum_{k=1}^{\infty}\ln(a+k+1) - \ln(a+k) - \ln(b+k+1) + \ln(b+k) \\
&= \frac{1}{\ln 2}(\ln(b+1) - \ln(a+1)) = \mu([a,b]).
\end{aligned}$$

□

2.2 Théorèmes asymptotiques

Nous allons établir certains résultats valables pour tout système dynamique mesuré, ou pour certains d'entre-eux valables quand l'espace ambient est de mesure finie. Commençons par le *théorème de récurrence de Poincaré.*

Théorème 2.2.1 : *Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un système dynamique mesuré tel que $\mu(X) < \infty$. Si $A \in \mathcal{B}$ vérifie $\mu(A) > 0$, alors l'ensemble B, formé des points $x \in A$ pour lesquels il existe une infinité d'entiers $n \geq 1$ tels que $T^n(x) \in A$, est une partie mesurable qui vérifie $\mu(B) = \mu(A)$.*

Preuve. Le complémentaire de B dans A s'écrit $A \setminus B = \bigcup_{m\geq 1} E_m$, où

$$E_m = \{x \in A \ \mid\ n \geq m \Rightarrow T^n(x) \notin A\}.$$

Remarquons que les ensembles $T^{-nm}(E_m)$, $n \geq 1$, sont tous disjoints de E_m. Ceci implique que les ensembles $T^{-nm}(E_m)$, $n \geq 0$, sont disjoints deux à deux. En effet, sin $n' > n$, alors:

$$\begin{aligned} & T^{-nm}(E_m) \cap T^{-n'm}(E_m) \neq \emptyset \\ \Rightarrow\ & T^{nm}(T^{-nm}(E_m) \cap T^{-n'm}(E_m)) \neq \emptyset \\ \Rightarrow\ & E_m \cap T^{-(n'-n)m}(E_m) \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Puisque les ensembles $T^{-nm}(E_m)$, $n \geq 1$, ont même mesure et puisque $\mu(X) < +\infty$, cette mesure commune est nulle. Ainsi, on a $\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} E_m\right) = 0$. $\square$.

Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un système dynamique mesuré. Les *moyennes de Birkhoff* de $f \ : X \to \mathbf{C}$ sont les moyennes temporelles $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i$. On veut étudier ces moyennes. Commençons par énoncer le théorème de Von Neumann qui donne une convergence, au sens quadratique. Rappelons que

$$\begin{aligned} U_T \ : L^2(\mu) &\to L^2(\mu) \\ f &\mapsto f \circ T \end{aligned}$$

est une isométrie de $L^2(\mu)$.

Théorème 2.2.2 : *Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un système dynamique mesuré. Définissons l'espace $L^2_{\text{inv}}(\mu) =$ $\text{Fix}(U_T)$ ainsi que la projection orthogonale $p_{\text{inv}} \ : L^2(\mu) \to L^2_{\text{inv}}(\mu)$. Alors, pour tout $f \in L^2(\mu)$, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} U_T^i(f) = p_{\text{inv}}(f).$$

Preuve. On doit prouver que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} U_T^i(f) = f,$$

si $f \in L^2_{\text{inv}}(\mu)$, ce qui évident, et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} U_T^i(f) = 0$$

si $f \in L^2_{\text{inv}}(\mu)^\perp$, ce qui l'est moins.

Commençons par prouver que

$$L^2_{\text{inv}}(\mu)^\perp = \overline{\text{Im}(\text{Id} - U_T)}$$

ou, de façon équivalente, que

$$L^2_{\text{inv}}(\mu) = \text{Im}(\text{Id} - U_T)^\perp.$$

Si $f \in L^2_{\text{inv}}(\mu)$, alors pour tout $g \in L^2(\mu)$, on a

$$\langle f, g - U_T(g)\rangle = \langle f, g\rangle - \langle f, U_T(g)\rangle = \langle f, g\rangle - \langle U_T(f), U_T(g)\rangle = 0,$$

Ainsi, on a $L^2_{\text{inv}}(\mu) \subset \text{Im}(\text{Id} - U_T)^\perp$.

Réciproquement, si f appartient à $\text{Im}(\text{Id} - U_T)^\perp$ alors, pour tout $g \in L^2(\mu)$, on a

$$\langle f - U_T^*(f), g\rangle = \langle f, g - U_T(g)\rangle = 0,$$

où U_T^* est l'adjoint de U_T. Ainsi, on a $U_T^*(f) = f$. On peut alors écrire

$$\begin{aligned}\langle U_T(f) - f, U_T(f) - f\rangle &= \langle U_T(f), U_T(f)\rangle - \langle f, U_T(f)\rangle - \langle U_T(f), f\rangle + \langle f, f\rangle \\ &= \langle f, f\rangle - \langle U_T^*(f), f\rangle - \langle f, U_T^*(f)\rangle + \langle f, f\rangle = 0\end{aligned},$$

ce qui prouve que $U_T(f) = f$. On a prouvé l'inclusion inverse $\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - U_T)^\perp \subset L^2_{\mathrm{inv}}(\mu)$.

Supposons donc que $f \in L^2_{\mathrm{inv}}(\mu)^\perp$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $g \in L^2(\mu)$ tel que $\|f - (U_T(g) - g)\| \leq \varepsilon$. Ceci implique que

$$\frac{1}{n}\left\|\sum_{i=0}^{n-1} U_T^i(f) - U_T^n(g) - g\right\| \leq \varepsilon,$$

et donc que

$$\frac{1}{n}\left\|\sum_{i=0}^{n-1} U_T^i(f)\right\| \leq \frac{1}{n}(\|U_T^n(g)\| + \|g\|) + \varepsilon = \frac{2}{n}\|g\| + \varepsilon \leq 3\varepsilon,$$

si n est grand. □

Lea preuve précédente se généralise à n'importe quelle isométrie U d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Pour tout $x \in \mathcal{H}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} U^i(x) = p_{\mathrm{inv}}(x)$$

où $p_{\mathrm{inv}} : \mathcal{H} \to \mathrm{Ker(Id-U)} = \mathrm{Fix(U)}$ est la projection orthogonale. Dans le cas qui nous concerne, l'espace propre $\mathrm{Fix}(U_T)$ contient toujours les fonctions constantes si μ est une mesure finie.

Énonçons maintenant le *théorème ergodique de Birkhoff* qui donne un résultat de convergence presque sure.

THÉORÈME 2.2.3 : *Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un système dynamique mesuré. Fixons $f \in L^1(\mu)$. Il existe alors une fonction $f^* \in L^1(\mu)$, invariante by T, vérifiant :*

i) *pour presque tout point $x \in X$, on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i(x) = f^*(x)$;*

ii) *on a $\|f^*\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1}$;*

iii) *si $\mu(X) < +\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i = f^*$ dans $L^1(\mu)$ et par conséquent $\int f^*\, d\mu = \int f\, d\mu$;*

iv) *si T est inversible, alors pour presque tout point $x \in X$, on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^{-i}(x) = f^*(x)$.*

Preuve. On fixe $f \in L^1(\mu)$ dans la preuve. Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$S_n f = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i.$$

On commencera par prouver que la suite $(S_n f(x))_{n\geq 0}$ converge presque surement dans $\mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, c'est-à-dire que $\overline{f}(x) = \underline{f}(x)$ presque partout, où

$$\overline{f}(x) = \limsup_{n\to+\infty} S_n f(x), \quad \underline{f}(x) = \liminf_{n\to+\infty} S_n f(x).$$

Remarquons que les fonctions $\overline{f}$ et $\underline{f}$ sont invariantes car

$$S_{n+1}f = \frac{1}{n+1}f + \frac{n}{n+1}S_nf \circ T.$$

Pour montrer que $\overline{f}(x) = \underline{f}(x)$ presque partout, il suffit d'établir que si $\alpha < \beta$, alors $\mu(E_{\alpha,\beta}) = 0$, où

$$E_{\alpha,\beta} = \{x \in X \mid \underline{f}(x) < \alpha < \beta < \overline{f}(x)\}.$$

En effet, on a

$$\{x \in X \mid \underline{f}(x) < \overline{f}(x)\} = \bigcup_{\alpha,\beta\in\mathbf{Q}\,,\,\alpha<\beta} E_{\alpha,\beta}.$$

Nous montrerons dans un premier temps que $\mu(E_{\alpha,\beta}) = 0$ si $\mu(E_{\alpha,\beta}) < \infty$, puis dans un second temps que $\mu(E_{\alpha,\beta}) < \infty$. Nous allons utiliser le lemme suivant, généralement appelé *lemme ergodique maximal.*

Lemme 2.2.4 : *On a*

$$\int_{\widetilde{f}(x)>0} f\,d\mu \geq 0,$$

où on pose

$$\widetilde{f}(x) = \sup_{n\geq 1}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x)).$$

Preuve. On définit une suite croissante de fonctions positives $(f_n)_{n\geq 0}$ en posant $f_0(x) = 0$ pour tout $x \in X$, et pour tout $n \geq 1$

$$f_n(x) = \max(0, f(x), f(x) + f(T(x)), \ldots, f(x) + f(T(x)) + \ldots + f(T^{n-1}(x)).$$

On pose alors

$$E_n = \{x \in X \mid f_n(x) > 0\},$$

en notant que

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) + f_{n-1}(T(x)) & \text{si } x \in E_n \\ 0 & \text{si } x \notin E_n \end{cases}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}\int_{E_n} f\,d\mu &= \int_{E_n} f_n - f_{n-1}\circ T\,d\mu \\ &\geq \int_X f_n - f_{n-1}\circ T\,d\mu \\ &= \int_X f_n - f_{n-1}\,d\mu \geq 0.\end{aligned}$$

Puisque

$$\{x \in X \mid \widetilde{f}(x) > 0\} = \bigcup_{n\geq 1} E_n,$$

on obtient

$$\int_{f^*(x)>0} f\,d\mu \geq 0.$$

□

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) + f_{n-1}(T(x)) & \text{si } x \in E_n \\ 0 & \text{si } x \notin E_n \end{cases}$$

Montrons maintenant que $\mu(E_{\alpha,\beta}) = 0$ si $\mu(E_{\alpha,\beta}) < \infty$. Notons d'abord que $E_{\alpha,\beta}$ est invariant, puis appliquons le lemme 2.2.3 à la restriction $T|_{E_{\alpha,\beta}}$ et à l'application intégrable $f - \beta$. On obtient

$$\int_{E_{\alpha,\beta}} f - \beta \, d\mu \geq 0.$$

Appliquons-la également à $\alpha - f$. On obtient

$$\int_{E_{\alpha,\beta}} \alpha - f \, d\mu \geq 0.$$

Finalement, on obtient

$$\alpha\mu(E_{\alpha,\beta}) \geq \int_{E_{\alpha,\beta}} f \, d\mu \geq \beta\mu(E_{\alpha,\beta})$$

ce qui implique que $\mu(E_{\alpha,\beta}) = 0$.

Il reste à prouver que $\mu(E_{\alpha,\beta}) < \infty$. La mesure μ étant σ-finie, il suffit de prouver que tout ensemble mesurable $C \subset E_{\alpha,\beta}$ de mesure finie vérifie :

$$\begin{cases} \mu(C) \leq \frac{1}{\beta} \int_{E_{\alpha,\beta}} f \, d\mu & \text{si } \beta > 0 \\ \mu(C) \leq \frac{1}{\alpha} \int_{E_{\alpha,\beta}} f \, d\mu & \text{si } \alpha < 0. \end{cases}$$

Dans le cas où $\beta > 0$, on applique le lemme ergodique maximal à la restriction $T|_{E_{\alpha,\beta}}$ et à l'application intégrable $f - \beta\chi_C$. Puisque $f - \beta\chi_C \geq f - \beta$, on obtient

$$\int_{E_{\alpha,\beta}} f - \beta\chi_C \, d\mu \geq 0$$

et donc

$$\beta\mu(C) \leq \int_{E_{\alpha,\beta}} f \, d\mu.$$

Dans le cas où $\alpha < 0$, on applique le lemme à l'application $\alpha\chi_C - f$. Puisque $\alpha\chi_C - f \geq \alpha - f$, on obtient

$$\int_{E_{\alpha,\beta}} \alpha\chi_C - f \, d\mu \geq 0$$

et donc

$$\alpha\mu(C) \geq \int_{E_{\alpha,\beta}} f \, d\mu.$$

On va maintenant prouver **ii)**, ce qui impliquera que f^* appartient à $L_1(\mu)$ et est donc finie presque partout. Remarquons que

$$\int |S_n f| \, d\mu \leq \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \int |f \circ T^i| \, d\mu = \int |f| \, d\mu,$$

ce qui, grâce au lemme de Fatou, implique que

$$\int |f^*| \, d\mu = \int \liminf_{n\to+\infty} |S_n f| \, d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int |S_n f| \, d\mu \leq \int |f| \, d\mu.$$

Pour obtenir **iii)**, il faut montrer que si $\mu(X) < +\infty$, alors on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int |S_n f - f^*| \, d\mu = 0.$$

Dans le cas où f est bornée (disons par M), c'est une conséquence immédiate du théorème de convergence dominée de Lebesgue puisque la suite $(|S_n f(x) - f^*(x)|)_{n\geq 1}$ est uniformément bornée par $2M$ et tend vers 0 pour presque tout x. Dans le cas où f n'est pas bornée, alors pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $g \in L^\infty$ telle que $\int |f-g|\,d\mu < \varepsilon/3$. Ceci implique que pour tout $n \geq 1$, on a $\int |S_n f - S_n g|\,d\mu < \varepsilon/3$. On sait d'autre part que $\int |f^* - g^*|\,d\mu < \varepsilon/3$, d'après **ii)**, et on vient de voir que si n est assez grand, on a $\int |S_n g - g^*|\,d\mu < \varepsilon/3$. On en déduit que $\int |S_n f - f^*|\,d\mu < \varepsilon$ si n est assez grand.

Il reste à prouver **iv)**. Appliquons ce qui vient d'être fait à T^{-1}. On sait que la suite

$$S_{-n} f = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^{-i}$$

converge presque sûrement vers une fonction f^{**}. On veut prouver que $f^* = f^{**}$ presque partout. Il suffit, bien sûr, de prouver que $f^*(x) \leq f^{**}(x)$ pour presque tout x et donc de prouver que si $\alpha < \beta$, alors $\mu(F_{\alpha,\beta}) = 0$, où

$$F_{\alpha,\beta} = \{x \in X \ \mid \ f^{**}(x) < \alpha < \beta < f^*(x)\}.$$

Grâce au lemme ergodique maximal, on prouve, comme un peu plus haut, que pour toute partie $C \subset F_{\alpha,\beta}$ de mesure finie, on a

$$\begin{cases} \mu(C) \leq \frac{1}{\beta}\int_{F_{\alpha,\beta}} f\,d\mu & \text{si } \beta > 0 \\ \mu(C) \leq \frac{1}{\alpha}\int_{F_{\alpha,\beta}} f\,d\mu & \text{si } \alpha < 0. \end{cases}$$

On en déduit que $\mu(F_{\alpha,\beta}) < +\infty$, puis, grâce encore au lemme ergodique maximal, que

$$\alpha\mu(F_{\alpha,\beta}) \geq \int_{F_{\alpha,\beta}} f\,d\mu \geq \beta\mu(F_{\alpha,\beta}).$$

□

2.3 Propriétés des systèmes dynamiques mesurés

Comme dans le cas topologique, on va introduire plusieurs définitions sur les systèmes dynamiques mesurés. Commençons par un résultat d'indécomposabilité analogue à la transitivité.

Proposition 2.3.1 : *Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un système dynamique mesuré. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) *si $A \in \mathcal{B}$ vérifie $T^{-1}(A) = A$, alors $\mu(A) = 0$ ou $\mu(X \setminus A) = 0$;*

ii) *toute fonction mesurable $f\ : X \to \mathbf{C}$ invariante par T est constante presque partout.*

Si ces propriétés sont vérifiées, on dit que le système est ergodique.

Preuve. Supposons que **ii)** est vraie. Si $A \in \mathcal{B}$ vérifie $T^{-1}(A) = A$, alors la fonction χ_A est invariante. Puisqu'elle constante presque surement, l'un des ensembles A ou $X \setminus A$ est de mesure nulle.

Réciproquement, supposons que **i)** est vraie. Si $f\ : X \to \mathbf{C}$ est invariante par T, alors pour toute partie boréliennne $B \subset \mathbf{C}$, l'ensemble $A = f^{-1}(B)$ est mesurable et vérifie $T^{-1}(A) = A$. Ainsi, on a $\mu(A) = 0$ ou $\mu(X \setminus A) = 0$. Écrivons $f = f_0 + if_1$ où f_0 et f_1 sont à valeurs réelles.

On en déduit que pour tout $n \geq 1$, il existe un unique $k_n \in \mathbf{Z}$ tel que $f_0(x) \in [k_n/n, (k_n+1)/n[$ presque partout. On en déduit que f_0 (ainsi bien sûr que f_1) est constante presque partout. □

Remarque Dans le cas où T admet plusieurs mesures invariantes et où le système dynamique $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ est ergodique, on dira plus simplement que μ est ergodique.

Dans le cas où la mesure est finie, on a le critère d'ergodicité utile suivant :

PROPOSITION 2.3.2 : *Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un système dynamique mesuré, où $\mu(X) < +\infty$. Fixons $p \geq 1$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) *le système est ergodique ;*

ii) *toute fonction $f \in L^p(\mu)$ qui est invariante est constante presque partout.*

Preuve. Il suffit de montrer que **ii)** implique **i)**. On peut reprendre la première partie de la preuve de la proposition 2.3.1, puisque, dans le cas où $\mu(X) < +\infty$, toute fonction caractéristique appartient à $L^p(\mu)$. □

Le résultat suivant nous dit que pour un système ergodique, les moyennes temporelles et spatiales coïncident (dans le cas où la mesure invariante est finie) :

PROPOSITION 3.3.3 : *Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un système dynamique mesuré ergodique et $f \in L^1(\mu)$. Alors, pour presque tout point x, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i(x) = \begin{cases} \frac{1}{\mu(X)} \int f \, d\mu & si\ \mu(x) < +\infty, \\ 0 & si\ \mu(x) + \infty. \end{cases}$$

Preuve. Le théorème ergodique de Birkhoff nous dit qu'il existe une fonction $f^* \in L^1(\mu)$ invariante telle que $f^*(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i(x)$ pour presque tout point x. Cette fonction f^* est donc constante presque partout. Si $\mu(X) = +\infty$, elle est nulle puisqu'elle est intégrable ; si $\mu(X) < +\infty$ elle est égale à la moyenne spatiale de f puisque $\int f^* \, d\mu = \int f \, d\mu$. □

Remarque. On a un résultat similaire pour la convergence quadratique. Si $f \in L^2(\mu)$, la suite $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i$ converge dans $L^2(\mu)$ vers une fonction invariante. Celle-ci est donc constante: elle est nulle si $\mu(X) = +\infty$ puisqu'elle appartient à $L^2(\mu)$, elle est égale à la moyenne spatiale de f si $\mu(X) < +\infty$ puisque la convergence quadratique implique la convergence dans $L^1(\mu)$ dans ce cas.

Énonçons encore une caractérisation de l'ergodicité :

PROPOSITION 3.3.4 : *Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un système dynamique mesuré, tel que $\mu(X) = 1$. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) *le système est ergodique;*

ii) *pour tout A et B dans $\mathcal{B}$, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mu(A \cap T^{-i}(B)) = \mu(A)\mu(B).$$

iii) *pour tous f, g dans $L^2(\mu)$, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \int f(g\circ T^i)\, d\mu = \left(\int f\, d\mu\right)\left(\int g\, d\mu\right).$$

Preuve. Commençons par prouver que **ii)** implique **i)**. Si **ii)** est vraie, alors pour tout ensemble invariant $A \in \mathcal{B}$, on a

$$\mu(A)^2 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \mu(A\cap T^{-i}(A)) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \mu(A) = \mu(A),$$

ce qui implique que $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$. Le système est donc ergodique.

On déduit **ii)** de **iii)** en appliquant cette dernière propriété aux fonctions caractéristiques χ_A et χ_B.

Il reste à prouver que **i)** implique **iii)**. Supposons donc que **i)** soit vraie. Fixons f et g dans $L^2(\mu)$. D'après la remarque précédente, on sait que la suite $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \overline{g}\circ T^i$ converge dans $L^2(\mu)$ vers la fonction constante $\int \overline{g}\, d\mu$. On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \int f(g\circ T^i)\, d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} g\circ T^i\right) d\mu = \int f(\int g\, d\mu)\, d\mu = \int f\, d\mu \int g\, d\mu.$$

□

Introduisons maintenant une notion plus forte.

Proposition 2.3.5 : *Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un système dynamique mesuré tel que $\mu(X) = 1$. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *pour tous A, B dans $\mathcal{B}$, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(A\cap T^{-n}(B)) = \mu(A)\mu(B)\,;$$

ii) *pour tous f, g dans $L^2(\mu)$, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} \int f(g\circ T^n)\, d\mu = \left(\int f\, d\mu\right)\left(\int g\, d\mu\right).$$

Si ces propriétés sont vérifiées, on dit que le système est mélangeant.

Preuve. On déduit **i)** de **ii)** en appliquant **ii)** aux applications χ_A et χ_B. Supposons maintenant que **i)** est vrai. Fixons $A \in \mathcal{B}$ et considérons l'ensemble des fonctions $g \in L^2(\mu)$ telles que

$$\lim_{n\to+\infty} \int \chi_A(g\circ T^n)\, d\mu = \mu(A)\int g\, d\mu.$$

Il s'agit d'un espace vectoriel fermé. Puisqu'il contient les fonctions caractéristiques, d'après **i)**, il contient les fonctions étagées, et puisque les fonctions étagées sont denses dans $L^2(\mu)$, il est égal à $L^2(\mu)$. Fixons $g \in L^2(\mu)$ et considérons l'ensemble des fonctions $f \in L^2(\mu)$, telles que

$$\lim_{n\to+\infty} \int f(g\circ T^n)\, d\mu = \left(\int f\, d\mu\right)\left(\int g\, d\mu\right).$$

Là encore, il s'agit d'un espace vectoriel fermé. On vient de prouver qu'il contient les fonctions caractéristiques, on en déduit comme précédemment qu'il est égal à $L^2(\mu)$. $\square$

Pour un système mélangeant, les évènements "être dans A au temps 0" et "être dans B au temps n" sont asymptotiquement indépendants quand $n \to +\infty$. Cette notion est évidemment plus forte que l'ergodicité, puisque pour toute partie invariante $A \in \mathcal{B}$, on a

$$\mu(A)^2 = \lim_{n\to+\infty} \mu(A) \cap T^{-n}(A) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A) = \mu(A),$$

(ou si l'on utilise la proposition 2.3.4, puisque la convergence d'une suite implique la convergence au sens de Césaro).

Concluons cette section par la remarque suivante :

Proposition 2.3.6 : *Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ et $(Y, \mathcal{C}, \nu, S)$ deux systèmes dynamiques mesurés. On suppose que le second est un facteur du premier. Si $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ est ergodique, il en est de même de $(Y, \mathcal{C}, \nu, S)$. Si $\mu(X) = \nu(Y) = 1$ et si $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ est mélangeant, il en est de même de $(Y, \mathcal{C}, \nu, S)$.*

Preuve. Notons H la semi-conjugaison entre $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ et $(Y, \mathcal{C}, \nu, S)$. Supposons que $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ est ergodique. Soit $A \in \mathcal{C}$ une partie invariante par S, c'est-à-dire telle que $S^{-1}(A) = A$. Dans ce cas $H^{-1}(A)$ vérifie $T^{-1}(H^{-1}(A)) = H^{-1}(S^{-1}(A)) = H^{-1}(A)$. On en déduit que $\nu(A) = \mu(H^{-1}(A)) \in \{0, 1\}$. Ainsi, $(Y, \mathcal{C}, \nu, S)$ est ergodique.

Supposons maintenant que $\mu(X) = \nu(Y) = 1$. Pour toutes parties A et B dans $\mathcal{C}$, on a

$$\nu(A \cap S^{-n}(B)) = \mu(H^{-1}(A \cap S^{-n}(B))) = \mu(H^{-1}(A) \cap H^{-1}(S^{-n}(B))) = \mu(H^{-1}(A) \cap T^{-n}(H^{-1}(B)))$$

et

$$\nu(A)\nu(B) = \mu(H^{-1}(A)\mu(H^{-1}(B).$$

Ainsi, si $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ est mélangeant, il en est de même de $(Y, \mathcal{C}, \nu, S)$. $\square$

2.4 Liens entre théorie ergodique et dynamique topologique

Soit (X, T) un système dynamique topologique, où X est un espace topologique métrisable compact. Rappelons que $M_T(X)$ est l'ensemble des mesures boréliennes de probabilité invariantes. Nous allons expliquer pourquoi certaines de ces mesures sont ergodiques. Rappelons qu'un point x d'une partie convexe C d'un espace affine est *extrémal* si, pour tous points x', x'' de C et tout $t \in]0, 1[$, l'égalité $x = tx' + (1-t)x''$ implique que $x' = x'' = x$.

Théorème 2.4.1 : *Les points extrémaux de $M_T(X)$ sont les mesures invariantes ergodiques.*

Preuve. Supposons d'abord que $\mu \in M_T(X)$ n'est pas ergodique. Il existe une partie invariante A telle que $0 < \mu(A) < 1$. On peut décomposer

$$\mu = \mu(A)\frac{\mu_A}{\mu(A)} + \mu(X \setminus A)\frac{\mu_{X\setminus A}}{\mu(X \setminus A)}$$

comme barycentre de deux mesures de probabilité invariantes.

Supposons maintenant que $\mu \in M_T(X)$ est ergodique et s'écrit $\mu = t\mu' + (1-t)\mu''$, où μ', μ'' sont dans $M_T(X)$ et t dans $]0,1[$. Remarquons que, pour tout $A \in \mathcal{B}$, on a

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow \mu'(A) = 0,$$

ce qui signifie que μ' est dominée par μ. Grâce au théorème de Radon-Nikodym, on peut écrire $d\mu' = \varphi\, d\mu$, où $\varphi \in L^1(\mu)$. Le fait que les mesures μ et μ' sont invariantes par T implique alors que la fonction φ est également invariante. On en déduit que φ est constante μ-presque partout. Ceci implique que $\varphi = \mathbf{1}$ puisque μ et μ' sont des mesures de probabilité, et donc que $\mu' = \mu$. En répétant l'argument, on obtient $\mu'' = \mu$.

Au lieu d'invoquer le théorème de Radon-Nikodym, on peut également utiliser le théorème ergodique de Birkhoff. En effet, si $f \in C(X, \mathbf{C})$ est fixé, on sait que pour μ-presque tout point x, la suite $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x))$ converge vers $\int f\, d\mu$. Ceci est donc vrai également μ'-presque partout, Si on applique le théorème de Birkhoff à μ', on sait que pour μ'-presque tout point x, la suite $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x))$ converge vers une fonction $f^* \in L^1(\mu')$ et que $\int f^*\, d\mu' = \int f\, d\mu'$. Puisque f^* est la fonction constante $\int f\, d\mu$, on obtient $\int f\, d\mu = \int f\, d\mu'$. □

COROLLAIRE 2.4.2 : *Il existe au moins une mesure borélienne de probabilité invariante qui est ergodique.*

Preuve. On sait qu'il existe des points extremaux (voir exercice 35). En fait $M_T(X)$ est l'adhérence des barycentres des points extrémaux. □

Remarque. Le théorème de représentation de Choquet nous donne un résultat plus précis. Pour toute mesure $\mu \in M_T(X)$, il existe une mesure borélienne de probabilité ν_μ sur l'espace $M_T(X)$ tel que l'ensemble $E_T(X)$ des mesures extrémales vérifie $\nu_\mu(E_T(X)) = 1$ et tel que pour tout $f \in C(X, \mathbf{C})$ on a

$$\int f\, d\mu = \int_{M_T(X)} \left(\int f\, d\mu'\right) d\nu_\mu(\mu').$$

La proposition qui suit est bien pratique et fait le lien entre théorie ergodique et dynamique topologique.

PROPOSITITION 2.4.3 : *Soit $T : X \to X$ une transformation continue d'un espace topologique X. Supposons qu'il existe une mesure borélienne finie μ invariante par T dont le support est X. Alors:*

i) *T n'a pas de point errant ;*

ii) *si X est à base dénombrable, μ presque tout point est positivement récurrent ;*

iii) *si μ est ergodique alors T est positivement transitif.*

iv) *si μ est mélangeante alors T est topologiquement mélangeante.*

Preuve. Le support de la mesure est le plus petit ensemble fermé dont le complémentaire est de mesure nulle. Ainsi ce support est égal à X si et seulement si tout ensemble ouvert non vide est de mesure strictement positive. Le théorème de récurrence de Poincaré nous dit donc qu'il n'y a pas d'ensemble ouvert errant.

Pour montrer **ii)**, considérons une base dénombrable $(U_i)_{i\in I}$ de la topologie de X et pour tout $i \in I$, notons E_i l'ensemble des points $x \in U_i$ tels que $T^n(x) \notin U_i$ pour n assez grand. D'après le théorème de récurrence de Poincaré, on sait que $\mu(E_i) = 0$ et donc que $\mu\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right) = 0$. Le complémentaire ce ce dernier ensemble n'est rien d'autre que l'ensemble des points positivement récurrents.

Pour montrer **iii)**, considérons une partie ouverte non vide V et notons Y l'ensemble des points x dont l'orbite revient une infinité de fois dans V. C'est une partie invariante : elle vérifie $T^{-1}(Y) = Y$. Le théorème de récurrence de Poincaré nous dit que $\mu(V \setminus Y) = 0$. Puisque le support de μ est égal à X, nous en déduisons que $\mu(V) > 0$ et donc que $\mu(Y) > 0$. Puisque μ est ergodique, nous savons que $\mu(X \setminus Y) = 0$. Le fait que le support de μ est égal à X nous dit donc que Y est dense. Nous en déduisons que $\bigcup_{n\geq 0} T^{-n}(V)$, qui est l'ensemble des points dont l'orbite revient au moins une fois dans V, est dense. Nous avons prouvé la transitivité positive de T.

Enfin, pour montrer **iv)**, considérons deux parties ouvertes non vides U et V. Puisque μ est mélangeante, on $\lim_{n\to+\infty} U \cap T^{-n}(V) = \mu(U)\mu(V) > 0$. Par conséquent, si n est assez grand, on a $U \cap T^{-n}(V) \neq \emptyset$.

□

2.5 Exemples

Rotations du cercle.

On note ici $\mathcal{B}$ la tribu borélienne de $\mathbf{T}$, μ la mesure de Haar, et $T_{\widehat{a}}$ la rotation d'angle $\widehat{a} \in \mathbf{T}$, où $\widehat{a} = a + \mathbf{Z}$.

PROPOSITION 2.5.1 : *Le système dynamique $(\mathbf{T}, \mathcal{B}, \mu, T_{\widehat{a}})$ est ergodique si et seulement si $\widehat{a} \notin \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. Il n'est jamais mélangeant.*

Preuve. Considérons $f \in L^2(\mu)$ et développons cette fonction en série de Fourier

$$f(x + \mathbf{Z}) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k e^{2i\pi kx}.$$

La série de Fourier de $f \circ T_{\widehat{a}}$ est

$$f \circ T_{\widehat{a}}(x + \mathbf{Z}) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k e^{2i\pi ka} e^{2i\pi kx}.$$

L'invariance de f est caractérisée par les égalités, valables pour tout $k \in \mathbf{Z}$:

$$c_k = c_k e^{2i\pi ka}.$$

Si $a \notin \mathbf{Q}$, on obtient $c_k = 0$ quand $k \neq 0$, ce qui implique que f est constante. Le système est donc ergodique. Si $a = p/q \in \mathbf{Q}$, l'application $f\ : x \mapsto e^{2i\pi qx}$ est invariante par $T_{\widehat{a}}$ sans être constante, le système n'est pas ergodique.

Considérons $f\ : x + \mathbf{Z} \mapsto e^{2i\pi x}$ et $g\ : x + \mathbf{Z} \mapsto e^{-2i\pi x}$. Remarquons que

$$\left(\int f\, d\mu\right)\left(\int g\, d\mu\right) = 0$$

mais que la suite $(\int f(g\circ T^n)\,d\mu)_{n\geq 1}$ ne tend pas vers 0 car

$$\int f(g\circ T^n)\,d\mu = e^{-2i\pi na}.$$

Le système n'est jamais mélangeant. $\square$

Rotations du tore $\mathbf{T}^r$.

Ce qui vient d'être fait se généralise naturellement en dimension plus grande. On note ici $\mathcal{B}$ la tribu borélienne de $\mathbf{T}^r$, μ la mesure de Haar, et $T_{\widehat{a}}$ la rotation d'angle $\widehat{a}\in\mathbf{T}$, où $\widehat{a}=a+\mathbf{Z}^r$ et $a=(a_1,\ldots,a_r)\in\mathbf{R}^r$.

PROPOSITION 2.5.2 : *Le système dynamique $(\mathbf{T},\mathcal{B},\mu,T_{\widehat{a}})$ est ergodique si et seulement si les nombres réels 1, a_1, …, a_r sont rationnellement indépendants. Il n'est jamais mélangeant.*

Preuve Considérons une fonction $f\in L^2(\mu)$ et développons-la en série de Fourier

$$f(x+\mathbf{Z}^r)=\sum_{k\in\mathbf{Z}^r} c_k e^{2i\pi\langle k,x\rangle}.$$

La série de Fourier de $f\circ T_{\widehat{a}}$ est

$$f\circ T_{\widehat{a}}(x+\mathbf{Z}^r)=\sum_{k\in\mathbf{Z}^r} c_k e^{2i\pi\langle k,a\rangle}e^{2i\pi\langle k,x\rangle}.$$

L'invariance de f est cette fois ci caractérisée par les égalités, valables pour tout $k\in\mathbf{Z}^r$:

$$c_k=c_k e^{2i\pi\langle k,a\rangle}.$$

Si les nombres 1, a_1, …, a_r sont rationnellement indépendants, on aura $c_k=0$, si $k\neq 0$, ce qui implique que f est constante. Si les nombres 1, a_1, …, a_r ne sont pas rationnellement indépendants, il existe $k\neq 0$ tel que $\langle k,a\rangle\in\mathbf{Z}$. L'application $f\ :x\mapsto e^{2i\pi\langle k,x\rangle}$ est invariante par $T_{\widehat{a}}$ sans être constante, le système n'est pas ergodique.

Considérons $f\ :x+\mathbf{Z}^r\mapsto e^{2i\pi x_1}$ et $g\ :x+\mathbf{Z}^r\mapsto e^{-2i\pi x_1}$. Là-encore, nous avons

$$\left(\int f\,d\mu\right)\left(\int g\,d\mu\right)=0$$

mais la suite $(\int f(g\circ T^n)\,d\mu)_{n\geq 1}$ ne tend pas vers 0 car

$$\int f(g\circ T^n)\,d\mu = e^{-2i\pi na_1}.$$

Le système n'est jamais mélangeant. $\square$

COROLLAIRE 2.5.3 : *Si les nombres 1, a_1,…, a_r sont rationnellement indépendants, alors $T_{\widehat{a}}$ est minimal.*

Preuve. Puisque le support de μ est $\mathbf{T}^r$, les propositions 2.4.3 et 2.5.2 impliquent que $T_{\widehat{a}}$ est positivement transitif. Or, on a vu dans la proposition 1.5.11 que la transitivité impliquait la minimalité. $\square$

Décalage de Bernouilli.

On se donne un alphabet fini A, on munit $X = A^{\mathbf{N}}$ de la tribu borélienne (qui est donc engendrée par les cylindres) et on considère le décalage de Bernouilli σ.

PROPOSITION 2.5.4 : *Soit μ la mesure produit définie par une famille $(p_a)_{a\in A}$ de nombres positifs tels que $\sum_{a\in A} p_a = 1$. Le système dynamique $(X, \mathcal{B}, \mu, \sigma)$ est mélangeant.*

Preuve. Remarquons que si $C_w^{n_0}$ et $C_{w'}^{n'_0}$ sont deux cylindres, où $w = (w_0, \ldots, w_{m-1})$ et $w' = (w'_0, \ldots, w'_{m'-1})$, il existe N tels que les ensembles $\{n_0, \ldots, n_0 + m - 1\}$ et $\{n + n'_0, \ldots, n + n'_0 + m' - 1\}$ sont disjoints si $n \geq N$. Par construction de μ, on a

$$\mu(C_w^{n_0} \cap \sigma^{-n}(C_{w'}^{n'_0})) = \mu(C_w^{n_0})\mu(C_{w'}^{n'_0}).$$

Pour tout cylindre C, l'ensemble des $Z \in \mathcal{B}$ tels que

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(C \cap \sigma^{-n}(Y)) = \mu(C)\mu(Z)$$

est une σ-algèbre qui contient les cylindres, c'est donc $\mathcal{B}$ tout entier. Ainsi, pour tout $Z \in \mathcal{B}$, l'ensemble des $Y \in \mathcal{B}$ tels que

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(Y \cap \sigma^{-n}(Z)) = \mu(Y)\mu(Z)$$

contient tous les cylindres. Puisque c'est une σ-algèbre, c'est également $\mathcal{B}$. □

PROPOSITION 2.5.5 : *Soit μ la mesure de Markov définie par une matrice stochastique M et un vecteur fixe v. S'il existe une puissance de M dont les coefficients sont strictement positifs, la mesure μ est mélangeante.*

Preuve. Il faut montrer que pour tout Y et Z dans $\mathcal{B}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(Y \cap \sigma^{-n}(Z)) = \mu(Y)\mu(Z).$$

Pour les raisons expliquées dans la preuve du lemme précédent, il suffit de prouver que

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(C_w^{n_0} \cap \sigma^{-n}(C_{w'}^{n'_0})) = \mu(C_w^{n_0})\mu(C_{w'}^{n'_0})$$

si $C_w^{n_0}$ et $C_{w'}^{n'_0}$ sont deux cylindres, où $w = (w_0, \ldots, w_{m-1})$ et $w' = (w'_0, \ldots, w'_{m'-1})$.

Pour tout $n \geq 1$, écrivons $M^n = (M^n_{i,j})_{i,j}$. Si $n > m - 1 + n_0 - n'_0$, alors

$$\begin{aligned}
\mu(C_w^{n_0} \cap \sigma^{-n}(C_{w'}^{n'_0})) &= \sum_{i_1,\ldots,i_{n'}} v_{w_0} \left(\prod_{k=0}^{m-2} M_{w_k,w_{k+1}}\right) M_{w_{m-1},i_1} M_{i_1,i_2} \ldots M_{i_{n'-1},i_{n'}} M_{i_{n'},w'_0} \left(\prod_{k=0}^{m'-1} M_{w'_k,w'_{k+1}}\right), \\
&= v_{w_0} \left(\prod_{k=0}^{m-2} M_{w_k,w_{k+1}}\right) M^{n'+1}_{w_{m-1},w'_0} \left(\prod_{k=0}^{m'-1} M_{w'_k,w'_{k+1}}\right),
\end{aligned}$$

où $n' = n - m - n_0 + n'_0$, et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(C_w^{n_0} \cap \sigma^{-n}(C_{w'}^{n'_0})) = v_{w_0} \left(\prod_{k=0}^{m-2} M_{w_k,w_{k+1}}\right) v_{w'_0} \left(\prod_{k=0}^{m'-1} M_{w'_k,w'_{k+1}}\right) = \mu(C_w^{n_0})\mu(C_{w'}^{n'_0}),$$

car on a vu précédemment que $\lim_{n\to+\infty} M_{i,j}^n = v_j$. $\square$

Remarque L'équivalent des propositions 2.5.4 et 2.5.5 est vrai pour le décalage bilatéral.

Endomorphismes linéaires de $\mathbf{T}$.

Remarquons la conséquence suivante de la proposition 2.1.1. :

PROPOSITION 2.5.6 : *Le système dynamique* $(\mathbf{T}, \mathcal{B}, \mu, T)$*, où* μ *est la mesure de Haar, et* $T\ : \widehat{x} \mapsto p\widehat{x}$*,* $p \geq 2$*, est mélangeant.*

Preuve. Nous avons vu dans la proposition 2.1.1 qu'il était conjugué au décalage de Bernoulli sur $\{0, \ldots, p-1\}^{\mathbf{N}}$ muni de la mesure équidistribuée. $\square$

Endomorphismes linéaires de $\mathbf{T}^r$.

Nous allons généraliser le dernier résultat en dimension plus grande. On se donne une application linéaire $A : \mathbf{R}^r \to \mathbf{R}^r$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^r$ est à coefficients entiers et on note $\widehat{A}\ : \mathbf{T}^r \to \mathbf{T}^r$ l'endomorphisme de $\mathbf{T}^r$ associé. Rappelons que si $\det A \neq 0$, alors $\widehat{T}$ préserve la mesure de Haar.

PROPOSITION 2.5.7 : *Supposons que* $\det A \neq 0$*. Le système dynamique* $(\mathbf{T}^r, \mathcal{B}, \mu, \widehat{A})$ *est ergodique si et seulement si les valeurs propres de* A *ne sont pas racines de l'unité. Dans ce cas, il est mélangeant.*

Preuve. Considérons une fonction $f \in L^2(\mu)$ et développons-la en série de Fourier

$$f(x + \mathbf{Z}^r) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^r} c_k e^{2i\pi\langle k,x\rangle}.$$

La série de Fourier de $f \circ \widehat{A}$ est

$$f \circ \widehat{A}(x + \mathbf{Z}^r) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^r} c_k e^{2i\pi\langle k,Ax\rangle} = \sum_{k \in \mathbf{Z}^r} c_k e^{2i\pi\langle A^t k,x\rangle}.$$

L'invariance de f est donc caractérisée par les égalités, valables pour tout $k \in \mathbf{Z}^r$:

$$c_k = c_{A^t k}.$$

Dans le cas où les valeurs propres de A ne sont pas racines de l'unité, il en est de même des valeurs propres de A^t et donc, si $k \neq 0$, les indices $(A^t)^n k$, sont tous distincts. Ainsi, si f est invariante et si k est non nul, on aura $c_k = c_{(A^t)^n k}$ et $\sum_{n\geq 1} |c_{(A^t)^n k}|^2 < +\infty$. Ceci n'est possible que si $c_k = 0$. La fonction f est donc constante, le système est ergodique.

Dans le cas où l'une au moins des valeurs propres de A est racine de l'unité, il existe $n \geq 1$ tel que $(A^t)^n - \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^r}$ n'est pas inversible. Ceci implique qu'il existe $k \in \mathbf{Z}^r$ non nul tel que $(A^t)^n k = k$. La fonction

$$f\ : x + \mathbf{Z}^r \mapsto \sum_{j=0}^{n-1} e^{2i\pi\langle k,A^j x\rangle}$$

est invariante par $\widehat{A}$ sans être constante, le système n'est pas ergodique

Revenons au cas où les valeurs propres de A ne sont pas racines de l'unité. Fixons k et k' dans $\mathbf{Z}^r \setminus \{0\}$ et considérons

$$f \ : x + \mathbf{Z}^r \mapsto e^{\langle k,x\rangle}, \ \ g \ : x + \mathbf{Z}^r \mapsto e^{\langle k',x\rangle}.$$

Remarquons que

$$f(x+\mathbf{Z}^r)(g \circ \widehat{A}^n(x+\mathbf{Z}^r)) = e^{\langle k+(A^t)^n k',x\rangle}.$$

Il existe au plus une valeur de n telle que $k + (A^t)^n k' \neq 0$. Ceci implique que

$$\lim_{n\to+\infty} \int f(g \circ T^n)\, d\mu = 0 = \left(\int f\, d\mu\right)\left(\int g\, d\mu\right).$$

L'égalité

$$\lim_{n\to+\infty} \int f(g \circ T^n)\, d\mu = \left(\int f\, d\mu\right)\left(\int g\, d\mu\right)$$

étant évidemment vraie si f ou g est constante, elle est vraie pour tout couple de polynômes trigonométriques. Par densité des polynômes trigonométriques dans $L^2(\mu)$, on montre, comme dans la preuve de la proposition 2.3.5, que l'égalité

$$\lim_{n\to+\infty} \int f(g \circ T^n)\, d\mu = \left(\int f\, d\mu\right)\left(\int g\, d\mu\right)$$

est vraie pour tout couple de fonctions dans $L^2(\mu)$. Le système est bien mélangeant. $\square$

Nous allons associer à toute application continue $T : X \to X$ définie sur un espace topologique compact X une quantité $h(T) \in [0, +\infty]$, invariante par conjugaison, qui mesure le désordre de la dynamique. Cet invariant, *l'entropie topologique*, a été introduit par Adler, Konheim et McAndrew en 1965, par analogie avec l'entropie métrique de Kolmogorov et Sinai, définie auparavant dans le cadre des systèmes dynamiques mesurés.

3.1 Entropie relative à un recouvrement

Rappelons qu'un recouvrement ouvert d'un espace topologique X est une famille $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ de parties ouvertes telle que $X = \bigcup_{i\in I} U_i$. Si U est une partie ouverte de X, on écrira $U \in \mathcal{U}$ s'il existe $i \in I$ tel que $U = U_i$. On dira que le recouvrement $\mathcal{V} = (V_j)_{j\in J}$ est *plus fin* que $\mathcal{U}$ si pour tout $j \in J$, il existe $i \in I$ tel que $V_j \subset U_i$, on écrira alors $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V}$. Un cas particulier est la cas où $\mathcal{V}$ est un *sous-recouvrement* de $\mathcal{U}$: pour tout $j \in J$, il existe $i \in I$ tel que $V_j = U_i$. La relation $\preceq$ est un pré-ordre et on notera $\sim$ la relation d'équivalence associée : $\mathcal{U} \sim \mathcal{V}$ si $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V}$ et $\mathcal{V} \preceq \mathcal{U}$. Par exemple, si la topologie est induite par une distance d, et si $\varepsilon > 0$ est donné, les recouvrements

$$\mathcal{U} = (B(x,\varepsilon))_{x\in X} \quad \mathcal{V} = (B(x,\alpha))_{x\in X\,,\,0<\alpha\leq\varepsilon}$$

sont équivalents.

Si $(\mathcal{U}^j)_{1\leq j\leq n}$ est une famille finie de recouvrements ouverts de X, où $\mathcal{U}^j = (U_i^j)_{i\in I_j}$, on peut définir le recouvrement

$$\bigvee_{j=1}^{n} \mathcal{U}^j = (U_{i_1}^1 \cap \ldots \cap U_{i_n}^n)_{(i_1,\ldots i_n)\in I_1\times\ldots\times I_n}.$$

Il est plus fin que tous les $\mathcal{U}^j$. Remarquons que si $(\mathcal{V}^j)_{1\leq j\leq n}$ est une famille finie de recouvrements ouverts de X et si $\mathcal{U}^j \preceq \mathcal{V}^j$ pour tout $j \in \{1,\ldots n\}$, alors $\bigvee_{j=1}^n \mathcal{U}^j \preceq \bigvee_{j=1}^n \mathcal{V}^j$.

Si $H : Y \to X$ est une application continue entre deux espaces topologiques et si $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de X, on peut définir le recouvrement $H^{-1}(\mathcal{U}) = (H^{-1}(U_i))_{i\in I}$ de Y. On a bien évidemment :

- $H^{-1}\left(\bigvee_{j=1}^n \mathcal{U}^j\right) = \bigvee_{j=1}^n H^{-1}(\mathcal{U}^j)$;
- $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V} \Longrightarrow H^{-1}(\mathcal{U}) \preceq H^{-1}(\mathcal{V})$.

Si X est compact, tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ admet un sous-recouvrement fini. On notera alors $N(\mathcal{U})$ le plus petit cardinal des sous-recouvrements finis. Remarquons que :

- $N(\mathcal{U}) = 1$ si et seulement si $X \in \mathcal{U}$;
- $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V} \Longrightarrow N(\mathcal{U}) \leq N(\mathcal{V})$;
- $\mathcal{U} \sim \mathcal{V} \Longrightarrow N(\mathcal{U}) = N(\mathcal{V})$;
- $N\left(\bigvee_{j=1}^n \mathcal{U}^j\right) \leq \prod_{j=1}^n N(\mathcal{U}^j)$.

De plus, si $H : X \to Y$ est une application continue entre deux espaces topologiques compacts, alors pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de Y, on a :

- $N(T^{-1}(\mathcal{U})) \leq N(\mathcal{U})$;

- $N(T^{-1}(\mathcal{U})) = N(\mathcal{U})$ si T est surjective.

En effet, si $\mathcal{V}$ est un sous-recouvrement fini de $\mathcal{U}$, alors $T^{-1}(\mathcal{V})$ est un sous-recouvrement fini de $T^{-1}(\mathcal{U})$ de même cardinal. De plus, dans le cas où f est surjective, si $\mathcal{V}$ est une sous-famille finie de $\mathcal{U}$, telle que $T^{-1}(\mathcal{V})$ soit un recouvrement de X, alors $\mathcal{V}$ est un recouvrement de Y.

On supposera dorénavant que X est compact et que $T \ : M \to M$ est continue. Énonçons maintenant le résultat fondamental suivant :

Proposition 3.1.1 : *Pour tout recouvrement ouvert* $\mathcal{U}$ *de* X*, la suite*

$$\frac{1}{n} \ln \left(N \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{U}) \right) \right)$$

converge. Sa limite $h(T,\mathcal{U})$ *est* l'entropie topologique de T relativement à $\mathcal{U}$*, elle vérifie :*

$$0 \leq h(T,\mathcal{U}) \leq \ln(N(\mathcal{U})).$$

Preuve. Remarquons que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$, où $u_n = N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{U})\right)$, est sous-multiplicative, elle vérifie $u_{n+m} \leq u_n u_m$. En effet,

$$\begin{aligned}
u_{n+m} &= N\left(\bigvee_{i=0}^{n+m-1} T^{-i}(\mathcal{U})\right) \\
&= N\left(\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{U})\right) \vee T^{-n}\left(\bigvee_{i=0}^{m-1} T^{-i}(\mathcal{U})\right)\right) \\
&\leq N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{U})\right) N\left(T^{-n}\left(\bigvee_{i=0}^{m-1} T^{-i}(\mathcal{U})\right)\right) \\
&\leq u_n u_m.
\end{aligned}$$

Posant $v_n = \ln(u_n)$, on obtient une suite $(v_n)_{n\geq 1}$ qui est donc sous-additive et positive. On sait alors que la suite $(\frac{v_n}{n})_{n\geq 1}$ converge et que

$$0 \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{n} \leq v_1.$$

En effet, fixons $p \geq 1$. Pour tout $n \geq p$, notons $n = kp + r$ la division euclidienne de n par p et remarquons que

$$\frac{v_n}{n} \leq \frac{v_{kp} + v_r}{n} \leq \frac{u_{kp}}{kp} + \frac{v_r}{n} \leq \frac{v_p}{p} + \frac{v_r}{n}.$$

Ceci implique que

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{v_n}{n} \leq \frac{v_p}{p} \quad (\leq v_1),$$

et donc que

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{v_n}{n} \leq \inf_{p\geq 1} \frac{v_p}{p} \leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{v_n}{n}.$$

□

Énonçons maintenant les propriétés principales de l'entropie relative à un recouvrement.

Proposition 3.1.2 : *On a les résultats suivants :*

i) $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V} \Longrightarrow h(T,\mathcal{U}) \leq h(T,\mathcal{V})$;

ii) $h(T,\mathcal{U}) = h(T, \bigvee_{i=0}^{m} T^{-i}(\mathcal{U}))$ *pour tout* $m \geq 0$;

iii) $h(T^m, \bigvee_{i=0}^{m-1} T^{-i}(\mathcal{U})) = m\, h(T,\mathcal{U})$ *pour tout* $m \geq 1$;

iv) $h(T^{-1},\mathcal{U}) = h(T,\mathcal{U})$ *si* T *est un homéomorphisme ;*

v) $h(T,\mathcal{U}) = h(T, T^{-1}(\mathcal{U})) = h(T, T(\mathcal{U}))$ *si* T *est un homéomorphisme.*

Preuve. L'assertion **i)** découle immédiatement de l'inégalité

$$N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{U})\right) \leq N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{V})\right),$$

conséquence de

$$\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{U}) \preceq \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{V}).$$

Pour montrer **ii)**, posons $\mathcal{V} = \bigvee_{i=0}^{m} T^{-i}(\mathcal{U})$ et remarquons d'abord que

$$\bigvee_{i=0}^{m+n-1} T^{-i}(\mathcal{U}) \sim \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{V}),$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} h(T,\mathcal{U}) &= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+m} \ln\left(N\left(\bigvee_{i=0}^{m+n-1} T^{-i}(\mathcal{U})\right)\right) \\ &= \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+m}\, \frac{1}{n} \ln\left(N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{V})\right)\right) = h(T,\mathcal{V}). \end{aligned}$$

L'assertion **iii)** se déduit de l'égalité

$$\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-im}\left(\bigvee_{i=0}^{m-1} T^{-i}(\mathcal{U})\right) = \bigvee_{i=0}^{nm-1} T^{-i}(\mathcal{U}).$$

Pour montrer **iv)** remarquons que

$$N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{i}(\mathcal{U})\right) = N\left(T^{n-1}\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{U})\right)\right) = N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{U})\right),$$

et pour montrer **v)**, que

$$N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(T^{-1}(\mathcal{U}))\right) = N\left(T^{-1}\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{U})\right)\right) = N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{U})\right)$$

et

$$N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(T(\mathcal{U}))\right) = N\left(T\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{U})\right)\right) = N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{U})\right)$$

□

3.2 Entropie topologique

L'entropie topologique $h(T) \in [0,+\infty]$ est, par définition, le supremum des entropies relatives à des recouvrements :

$$h(T) = \sup\{h(T,\mathcal{U}),\ \mathcal{U} \text{ recouvrement ouvert de } X\}.$$

Énonçons les propriétés principales :

PROPOSITION 3.2.1 : *On a les propriétés suivantes :*

i) $h(\mathrm{Id}_X) = 0$ *;*

ii) $h(T^n) = nh(T)$*, pour tout* $n \geq 0$ *;*

iii) *si* T *est un homéomorphisme, alors* $h(T^k) = |k|h(T)$*, pour tout* $k \in \mathbf{Z}$ *;*

iv) *si* $S : Y \to Y$ *est un facteur de* T*, alors* $h(S) \leq h(T)$ *;*

v) *si* $S : Y \to Y$ *est conjugué à* T*, alors* $h(S) = h(T)$ *;*

vi) *si* $Y \subset X$ *est fermé et positivement invariant, alors* $h(T|_Y) \leq h(T)$*.*

Preuve. Si $\mathcal{U}$ est un recouvrement ouvert de X, alors pour tout entier $n \geq 1$, on a $\bigvee_{i=0}^{n-1} \mathrm{Id}_X^{-i}(\mathcal{U}) \sim \mathcal{U}$, ce qui bien sûr implique **i)**.

Pour montrer **ii)** dans le cas où $n \geq 1$ (dans le cas où $n = 0$ ce n'est rien d'autre que **i)**) remarquons que pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$, on a

$$h(T^n,\mathcal{U}) \leq h\left(T^n, \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{U})\right) = nh(T,\mathcal{U}),$$

ce qui implique

$$h(T^n,\mathcal{U}) \leq nh(T),\ \ nh(T,\mathcal{U}) \leq h(T^n),$$

et donc

$$h(T^n) \leq nh(T),\ \ nh(T) \leq h(T^n)$$

en passant aux supremums.

L'assertion **iii)** se déduit immédiatement de l'égalité $h(T,\mathcal{U}) = h(T^{-1},\mathcal{U})$.

Pour prouver **iv)**, considérons une semi-conjugaison $H : X \to Y$ entre T et S. Pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de Y, et tout entier $n \geq 1$, on a

$$H^{-1}\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} S^{-i}(\mathcal{U})\right) = \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(H^{-1}(\mathcal{U}))$$

ce qui implique, puisque H est surjective, que

$$N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} S^{-i}(\mathcal{U})\right) = N\left(H^{-1}\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} S^{-i}(\mathcal{U})\right)\right) = N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(H^{-1}(\mathcal{U}))\right)$$

On en déduit que

$$h(S,\mathcal{U}) = h(T, H^{-1}(\mathcal{U})) \leq h(T),$$

puis en passant au supremum que $h(S) \leq H(T)$. On en déduit alors immédiatement **iv)**.

Pour prouver **vi)** considérons un recouvrement ouvert $\mathcal{V} = (V_i)_{i\in I}$ de Y. Pour tout $i \in I$, on peut choisir une partie ouverte U_i de X telle que $V_i = Y \cap U_i$. Si on ajoute $X \setminus Y$ à cette famille, on obtient un recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X. Remarquons maintenant que

$$N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} (T|_Y)^{-i}(\mathcal{V})\right) \leq N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{U})\right).$$

En effet, puisque $T(Y) \subset Y$, on sait qu'aucun des ensembles $T^{-i}(X \setminus Y)$ ne rencontre Y. Ceci implique que pour tout sous-recouvrement fini $\mathcal{U}'$ de $\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{U})$, tout élément non vide de $Y \cap U'$, $U' \in \mathcal{U}'$, appartient à $\bigvee_{i=0}^{n-1} (T|_Y)^{-i}(\mathcal{V})$. On en déduit que

$$h(T|_Y, \mathcal{V}) \leq h(T,\mathcal{U}) \leq h(T),$$

puis en passant au supremum que $h(T|_Y) \leq h(T)$. □

3.3 Recouvrement générateur

Il est bien sûr difficile de calculer l'entropie topologique à partir de la définition abstraite précédente. Nous verrons dans ce paragraphe qu'on peut se restreindre à certains recouvrements. Nous dirons qu'une famille $(\mathcal{U}^\alpha)_{\alpha\in A}$ de recouvrements ouverts est une *famille génératrice* si, pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$, il existe $\alpha \in A$ tel que $\mathcal{U} \preceq \mathcal{U}^\alpha$. Nous avons bien évidemment :

Proposition 3.3.1 : *Si $(\mathcal{U}^\alpha)_{\alpha\in A}$ est une famille génératrice de recouvrements ouverts, alors*

$$h(T) = \sup_{\alpha\in A} h(T,\mathcal{U}^a).$$

Un exemple simple de famille génératrice est donné par les recouvrements finis, un autre exemple est donné, dans le cas où X est un espace métrique, par la famille $(\mathcal{U}^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, où $\mathcal{U}^\varepsilon = (B(x,\varepsilon))_{x\in X}$ est le recouvrement par les boules de rayon ε. Le caractère générateur de cette famille n'est rien d'autre que le lemme de recouvrement de Lebesgue : *pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que toute boule $B(x,\varepsilon)$ est contenue dans une partie ouverte $U \in \mathcal{U}$.* Remarquons que la fonction $\varepsilon \mapsto h(T,\mathcal{U}^\varepsilon)$ est décroissante et donc que

$$h(T) = \sup_{\varepsilon>0} h(T,\mathcal{U}^\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} h(T,\mathcal{U}^\varepsilon).$$

Dans le cas d'un espace métrique, on peut donner une caractérisation des familles génératrices, grâce au lemme de recouvrement de Lebesgue. Définissons le diamètre d'un recouvrement $\mathcal{U}$:

$$\mathrm{diam}(\mathcal{U}) = \sup_{U\in\mathcal{U}} \mathrm{diam}(U),$$

où

$$\mathrm{diam}(U) = \sup_{x\in U,\, y\in U} d(x,y).$$

Supposons maintenant que $(\mathcal{U}_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante de recouvrements ouverts, c'est-à-dire une suite vérifiant $\mathcal{U}_n \preceq \mathcal{U}_{n+1}$, pour tout $n \geq 0$. Dans le cas d'un espace métrique, cette suite est génératrice si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{diam}(\mathcal{U}_n) = 0$. Dans ce cas, on a

$$h(T) = \lim_{n\to+\infty} h(T,\mathcal{U}_n).$$

Dans de nombreux exemples, une suite génératrice peut être définie à partir d'un seul recouvrement. Plus précisément, si T est une transformation continue d'un espace topologique compact X, on dira qu'un recouvrement ouvert U de X est un *recouvrement générateur* si la suite $\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{U})\right)_{n\geq 1}$ est génératrice.

PROPOSITION 3.3.2 : *Soit T une transformation continue d'un espace topologique compact X. S'il existe un recouvrement générateur $\mathcal{U}$, alors*

$$h(T) = h(T,\mathcal{U}) < +\infty.$$

Preuve. On a

$$h(T) = \lim_{n\to+\infty} h(T, \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{U})) = h(T,\mathcal{U}).$$

□

La remarque précédente sur la famille $(\mathcal{U}^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ va nous permettre de donner, dans le cas d'une transformation continue T d'un espace métrique compact (X, d), une définition alternative de l'entropie topologique, définition due de façon indépendante à Bowen et Dinaburg. Définissons, pour tout entier $n \geq 1$, une distance d_n topologiquement équivalente à d, en posant :

$$d_n(x, y) = \max_{0\leq i\leq n-1} d(T^i(x), T^i(y)),$$

et notons $B_n(x, \varepsilon)$ la boule ouverte de rayon ε et de centre x. Soit $\varepsilon > 0$ et $n \geq 1$. On dira qu'un ensemble fini $S \subset X$ est (n, ε)-*séparé* si, pour tous points x et y de S, on a $d_n(x, y) \geq \varepsilon$. De même, on dira qu'un ensemble fini $R \subset X$ est (n, ε)-*couvrant* si, pour tout $x \in X$, il existe $y \in R$ tel que $d_n(x, y) < \varepsilon$. On notera alors $s(n, \varepsilon)$ le plus grand cardinal des ensembles (n, ε)-séparés et $r(n, \varepsilon)$ le plus petit cardinal des ensembles (n, ε)-couvrants. Enfin, on écrira $N(n, \varepsilon) = N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{U}^\varepsilon)\right)$. Ces nombres sont naturellement liés, comme l'exprime le résultat suivant :

PROPOSITION 3.3.3 : *On a*

$$N(n, \varepsilon) \leq r(n, \varepsilon) \leq s(n, \varepsilon) \leq N(n, \frac{\varepsilon}{2}).$$

Preuve. Pour montrer la première inégalité, choisissons un ensemble R de cardinal $r(n, \varepsilon)$ qui est (n, ε)-couvrant. Les boules $B_n(x, \varepsilon)$, $x \in R$, recouvrent X et appartiennent toutes à $\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{U}^\varepsilon)$. Pour montrer la seconde inégalité, remarquons qu'un ensemble (n, ε)-séparé S de cardinal maximal $s(n, \varepsilon)$ est nécessairement (n, ε)-couvrant. Enfin, pour montrer la dernière égalité, remarquons qu'une partie $U \in \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{U}^{\frac{\varepsilon}{2}})$ contient au plus un élément de S. □

Corollaire 3.3.4 : *On a*

$$\begin{aligned} h(T) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln N(n,\varepsilon) \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln r(n,\varepsilon) \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln s(n,\varepsilon) \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\liminf_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln r(n,\varepsilon) \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\liminf_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln s(n,\varepsilon). \end{aligned}$$

Preuve. L'égalité

$$h(T) = \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln N(n,\varepsilon)$$

est une conséquence, vue plus haut, du caractère générateur de la famille $(\mathcal{U}^{\varepsilon})_{\varepsilon>0}$. L'égalité analogue, où l'on remplace $N(n,\varepsilon)$ par $r(n,\varepsilon)$ ou $s(n,\varepsilon)$ n'est pas nécessairement vraie, car rien ne dit que les suites $\left(\frac{1}{n}\ln s(n,\varepsilon)\right)_{n\geq 1}$ et $\left(\frac{1}{n}\ln r(n,\varepsilon)\right)_{n\geq 1}$ convergent. Cependant, la proposition précédente permet d'obtenir les quatre dernières égalités. □

Corollaire 3.3.5 : *Si* $T : X \to X$ *est lipschitzienne de rapport* 1*, c'est-à-dire si* $d(T(x),T(y)) \leq d(x,y)$ *pour tous* x*,* y *dans* X*, alors* $h(T) = 0$*.*

Preuve. Il suffit de remarquer que la distance d_n coïncide avec la distance d, et que les entiers $r(n,\varepsilon)$ et $s(n,\varepsilon)$ sont donc indépendants de n. □

3.4. Exemples

i) Le décalage de Bernouilli unilatéral :

Notons

$$\begin{aligned} \sigma\ : A^{\mathbf{N}} &\to A^{\mathbf{N}}, \\ (x_n)_{n\geq 0} &\mapsto (x_{n+1})_{n\geq 0} \end{aligned}$$

le décalage de Bernouilli, où A est un alphabet fini de cardinal $p \geq 2$. Le recouvrement $\mathcal{U} = (U_a)_{a\in A}$ formé des p cylindres $U_a = \{x = (x_n)_{n\geq 0} \in A^{\mathbf{N}} \mid x_0 = a\}$ est générateur. En effet, le recouvrement $\bigvee_{i=0}^{n-1}\sigma^{-i}(\mathcal{U})$ est formé des cylindres à base $\{0,\dots,n-1\}$. On a p^n cylindres disjoints dont les diamètres tendent vers 0 quand $n \to +\infty$, pour la distance d_α introduite dans le premier chapitre. Ainsi, on a

$$h(T) = h(T,\mathcal{U}) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln\left(N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}\sigma^{-i}(\mathcal{U})\right)\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln p^n = \ln p.$$

ii) Le décalage de Bernouilli bilatéral :

Notons

$$\sigma\ : A^{\mathbf{Z}} \to A^{\mathbf{Z}},$$
$$(x_k)_{k\in\mathbf{Z}} \mapsto (x_{k+1})_{k\in\mathbf{Z}}$$

le décalage de Bernouilli, où A est un alphabet fini de cardinal $p \geq 2$. On pourrait montrer qu'il n'y pas de recouvrement générateur (au sens donné plus haut). Cependant si on considère le recouvrement $\mathcal{U} = (U_a)_{a\in A}$ formé des p cylindres $U_a = \{x \in A^{\mathbf{Z}} \,|\, x_0 = a\}$, on peut remarquer que la famille $\left(\bigvee_{i=-n+1}^{n-1} \sigma^{-i}(\mathcal{U})\right)_{n\geq 0}$ est génératrice. Ainsi

$$h(\sigma) = \lim_{n\to+\infty} h\left(\sigma, \bigvee_{i=-n+1}^{n-1} \sigma^{-i}(\mathcal{U})\right) = \lim_{n\to+\infty} h\left(\sigma, \bigvee_{i=0}^{2n-2} \sigma^{-i}(\mathcal{U})\right) = h(\sigma,\mathcal{U}) = \ln p.$$

iii) Endomorphismes linéaires de $\mathbf{T}^1$.

On considère l'application $T\ : x \to px$ sur le cercle $\mathbf{T}^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, où $|p| \geq 2$. On va montrer que

$$h(T) = \ln |p|.$$

Puisque $h(T^2) = 2h(T)$ et puisque $T^2(x) = p^2x$, il suffit d'étudier le cas où $p \geq 2$. On pourrait montrer que T est un facteur du décalage unilatéral sur $\{1,\ldots,p\}^N$ et donc que $h(T) \leq \ln p$. Pour prouver que $h(T) = \ln p$ il suffit de trouver un recouvrement $\mathcal{U}$ tel que $h(T,\mathcal{U}) \geq \ln p$. Considérons un recouvrement $\mathcal{U}$ par des intervalles ouverts I de diamètre constant $\delta < \dfrac{1}{p+1}$. Pour tout $I \in \mathcal{U}$, l'ensemble $T^{-1}(I)$ est la réunion de p intervalles de longueur $\frac{\delta}{p}$ separés par des intervalles de longueur $\frac{1-\delta}{p}$. Puisque $\delta < \frac{1-\delta}{p}$ on sait que pour tout intervalle $I' \in \mathcal{U}$ l'ensemble $I' \cap T^{-1}(I)$ est un intervalle (éventuellement vide) de longueur $\leq \frac{\delta}{p}$. Ainsi on a $\mathrm{diam}(\mathcal{U}\vee T^{-1}(\mathcal{U})) \leq \frac{\delta}{p}$. Le même argument nous dit que $\mathcal{U}\vee T^{-1}(\mathcal{U})\vee T^{-2}(\mathcal{U})$ est un recouvrement par des intervalles de longueur $\leq \frac{\delta}{p^2}$ et plus généralement que $\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{U})$ est un recouvrement par intervalles et que

$$\mathrm{diam}\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{U})\right) \leq \frac{\delta}{p^{n-1}}.$$

On en déduit que $\mathcal{U}$ est un recouvrement générateur et que $h(T) = h(T,\mathcal{U})$. Remarquons maintenant que

$$N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\mathcal{U})\right) \geq \frac{p^{n-1}}{\delta} \geq p^n,$$

et donc que $h(T,\mathcal{U}) \geq \ln p$.

On peut éviter d'utiliser le fait que T est un facteur du décalage de Bernouilli en remarquant que $\mathcal{U}$ peut être choisi de telle façon que $N(\mathcal{U}) = p+2$. Ainsi a t-on

$$\ln p \leq h(T) = h(T,\mathcal{U}) \leq \ln N(\mathcal{U}) = \ln(p+2).$$

En appliquant ce qui précède à chaque T^r, $r \geq 1$, on obtient que

$$\ln p^r \leq h(T^r) = rh(T) \leq \ln(p^r + 2)$$

et donc que $h(T) = \ln p$.

Chapitre 1

Exercice 1

Soit $T : X \to X$ une application définie sur un ensemble X. On dira que $x \in X$ est *prépériodique* si x n'est pas périodique et s'il existe des entiers $n' > n > 0$ tels que $T^{n'}(x) = T^n(x)$.

1) Donner un exemple d'application ayant un point prépériodique. Peut-on trouver un exemple bijectif ?

2) Montrer que si X est fini, tout point est périodique ou prépériodique.

Exercice 2

Soit G un groupe et p un nombre premier. On note $X = \{(x_1, \ldots x_p) \in G^p \mid x_1 \ldots x_p = 1\}$.

1) Montrer que l'on définit bien une bijection $T : X \to X$ en posant

$$T(x_1, \ldots, x_p) = (x_2, \ldots, x_p, x_1).$$

2) Montrer que tout point de X est fixe ou périodique de période p.

3) Montrer que tout groupe fini dont l'ordre est multiple de p contient un point d'ordre p.

Exercice 3

Soit $T : X \to X$ une application continue définie sur un espace topologique compact X.

1) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- le point x est périodique ou presque périodique ;
- l'orbite de x est fermée.

On commencera par le cas où T est un homéomorphisme.

2) Le résultat est-il encore vrai si X n'est pas compact ?

Exercice 4

Déterminer, suivant les valeurs de $x_0 \in \mathbf{R}$, les ensembles $\alpha(x_0)$ et $\omega(x_0)$ quand

$$\begin{aligned} T : \mathbf{R} &\to \mathbf{R} \\ x &\mapsto x^3 \end{aligned}.$$

Exercice 5

Montrer que si X est un espace métrique compact et $T : X \to X$ une application continue, alors pour tout $x \in X$, on a $T(\omega(x)) = \omega(x)$. Montrer sur un exemple que la compacité est nécessaire pour avoir l'égalité.

Exercice 6

Donner un exemple de système dynamique topologique (X, T) tel que l'ensemble des points positivement récurrents n'est pas fermé.

Exercice 7

Soit (X, d) un espace métrique et $T : X \to X$ une application continue. On dira que $x \in X$ est *récurrent par chaîne* si, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier $n \geq 1$ et une suite $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$ vérifiant $x_0 = x_n = x$ et telle que pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, on ait $d(x_{k+1}, T(x_k)) < \varepsilon$. Montrer que tout point non errant est récurrent par chaîne. Dans le cas où X est compact, montrer que l'ensemble $\mathrm{Rec}_{\mathrm{ch}}(T)$ des points récurrents par chaîne est positivement invariant.

Exercice 8

On dira qu'une transformation continue $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *relève* une transformation continue $F : \mathbf{T} \to \mathbf{T}$ si pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $F(x + \mathbf{Z}) = f(x) + \mathbf{Z}$.

1) Montrer que si f relève F, les autre applications qui relèvent F vérifient $f = g + k$, où k est un entier.

2) Montrer qu'il existe un entier p tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $f(x+1) = f(x) + p$. Cet entier s'appelle le *degré* de F.

3) Montrer que F a au moins $p - 1$ points fixes.

4) En déduire une minoration de

$$\liminf_{n \to +\infty} \frac{\log(\sharp\mathrm{Fix}(F^n))}{n},$$

où $\sharp\mathrm{Fix}(F^n)$ est le nombre de points fixes de F^n.

5) Dans le cas où f est dérivable et vérifie $f'(x) > 1$, pour tout $x \in \mathbf{R}$, calculer $\sharp\mathrm{Fix}(F^n)$.

6) On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des applications continues $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telles que $h(x+1) = h(x) + 1$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Pour tout $h \in \mathcal{E}$ on définit une application $\Phi(h) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ par :

$$\Phi(h)(x) = \frac{1}{p} h(f(x)).$$

Montrer que $\Phi(h)$ appartient à $\mathcal{E}$, puis que $\Phi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ a un unique point fixe h_0. Expliquer pourquoi h_0 relève une application continue $H_0 : \mathbf{T} \to \mathbf{T}$ de degré 1, puis prouver que H_0 est une semi-conjugaison entre F et l'endomorphisme linéaire $\widehat{F}_* : \widehat{x} \to p\widehat{x}$.

7) On garde les hypothèses de la question précédente mais on suppose de plus que f est de classe C^1 et que $f'(x) > 1$, pour tout $x \in \mathbf{R}$. On note $\mathcal{E}'$ l'ensemble des applications $h \in \mathcal{E}$ qui sont croissantes. Pour tout $h \in \mathcal{E}'$ on définit une application $\Psi(h) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ par :

$$\Psi(h)(x) = f^{-1}(h(px)).$$

Prouvez que $\Psi(h)$ appartient à $\mathcal{E}'$ et que l'application $\Psi : \mathcal{E}' \to \mathcal{E}'$ a un unique point fixe h_1. Expliquer pourquoi h_1 est injective et relève un homéomorphisme $H_1 : \mathbf{T} \to \mathbf{T}$ de degré 1. Montrez que F et $\widehat{F}_*$ sont conjugués.

Exercice 9
Soit $T : X \to X$ une transformation continue positivement transitive. Montrer que tout point est non errant.

Exercice 10
Soit T un homéomorphisme transitif d'un espace topologique séparé X sans point isolé.

1) Montrer qu'il n'y a pas de point errant;

2) En déduire que pour toute partie ouverte V, les ensembles $W = \bigcup_{n\geq 0} T^{-k}(V)$ et $T(W)$ ont même adhérence.

3) Montrer que T est positivement transitif.

Exercice 11
Soit $F : \mathbf{T} \to \mathbf{T}$ l'homéomorphisme de $\mathbf{T}$ relevé par $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, où

$$\begin{cases} f(x) = x^2 & \text{si } x \in [0,1], \\ f(x+1) = f(x) + 1 & \text{pour tout } x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Si $\widehat{x} \neq \widehat{0}$, que peut-on dire de $\alpha(\widehat{x})$ et $\omega(\widehat{x})$? Prouver que la restriction de F à $\overline{O(\widehat{x})}$ est un homéomorphisme transitif mais pas positivement transitif.

Exercice 12
Soit X un espace de Baire à base dénombrable et $(T_i)_{i\in I}$ une famille dénombrable d'applications continues sur X positivement transitives. Montrer qu'il existe $x \in X$ tel que $\omega_{T_i}(x) = X$ pour tout $i \in I$.

Exercice 13
Soit X un espace topologique compact. Montrer qu'une application continue $T : X \to X$ est positivement minimale si et seulement si, pour toute partie ouverte non vide V, il existe $N \geq 0$ tel que $\bigcup_{0\leq n\leq N} T^{-n}(V) = X$.

Exercice 14
Montrer que si T est un homéomorphisme d'un espace topologique compact, il existe un point qui est positivement et négativement récurrent.

Exercice 15
Soient $T : X \to X$ et $S : Y \to Y$ deux transformations continues sur des espaces topologiques X et Y. On définit

$$\begin{aligned} T \times S : X \times Y &\to X \times Y \\ (x, y) &\mapsto (T(x), S(y)) \end{aligned}.$$

1) Si T et S sont positivement transitifs, en est-il toujours de même de $T \times S$?

2) Si T et S sont topologiquement mélangeants, en est-il toujours de même de $T \times S$?

3) Si T et S sont positivement minimaux, en est-il toujours de même de $T \times S$?

Exercice 16
Soit A un alphabet fini. Donner un exemple explicite d'homéomorphisme entre les ensembles de Cantor $A^{\mathbf{N}}$ et $A^{\mathbf{Z}}$.

Exercice 17

Soit A un alphabet fini. Montrer que si $\alpha \neq \alpha'$, les distances d_α et $d_{\alpha'}$ définies en section 1.5 sur $A^{\mathbf{N}}$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 18

1) Donner un exemple explicite de point de $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ dont l'orbite positive est dense par le décalage de Bernouilli.

2) Donner un exemple explicite de point de $\{0,1\}^{\mathbf{Z}}$ dont les orbites positives et négatives sont denses par le décalage de Bernouilli.

3) Construire un point positivement récurrent mais pas négativement récurrent du décalage de Bernouilli sur $\{0,1\}^{\mathbf{Z}}$. Montrer que l'ensemble des points vérifiant cette propriété est dense. Est-il résiduel ?

4) Montrer que si x^0 et x^1 sont deux points fixes du décalage Bernouilli sur $A^{\mathbf{Z}}$, où A est un alphabet fini, il existe un point x tel que $\lim_{k\to-\infty} \sigma^k(x) = x^0$ et $\lim_{k\to+\infty} \sigma^k(x) = x^1$.

Exercice 19

Soit T une rotation de $\mathbf{T}^1$ et σ le décalage de Bernouilli sur $\{0,1\}^{\mathbf{Z}}$. Montrer que σ n'est pas un facteur de T et que T n'est pas un facteur de σ. Même question en remplaçant T par une rotation de $\mathbf{T}^r$.

Exercice 20

Montrer que si $p \geq 2$, l'espace topologique $\{1,\ldots,p\}^{\mathbf{Z}}$ ne peut pas être muni d'une distance d qui est invariante par le décalage de Bernouilli, c'est-à-dire telle que $d(\sigma(x),\sigma(x')) = d(x,x')$, pour tout x et x' dans $\{1,\ldots,p\}^{\mathbf{Z}}$.

Exercice 21

On suppose ici que σ est le décalage de Bernouilli sur $\{1,\ldots,p\}^{\mathbf{N}}$ et que F est l'endomorphisme $\widehat{x} \mapsto p\widehat{x}$ sur $\mathbf{T}$. On rappelle que le second système dynamique est un facteur du premier et que σ^n et F^n ont respectivement p^n et $p^n - 1$ points fixes. Pouvez vous expliquez ce dernier fait.

Exercice 22

Soit A l'endomorphisme linéaire de $\mathbf{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et $\widehat{A}$ l'endomorphisme de $\mathbf{T}^2$ associé. Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln\left(\sharp \mathrm{Fix}(\widehat{A}^n)\right).$$

Exercice 23

Montrer que l'application

$$\begin{aligned} H \ : \{0,1\}^{\mathbf{N}} &\to \mathbf{T} \\ x &\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2x_n}{4^{n+1}} + \mathbf{Z} \end{aligned}$$

est un homéomorphisme entre $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ et une partie fermée $K \subset \mathbf{T}$ invariante par $F : \widehat{x} \mapsto 4\widehat{x}$ et que H induit une conjugaison entre $\sigma\ : \{0,1\}^{\mathbf{N}} \to \{0,1\}^{\mathbf{N}}$ et $F|_K$.

Exercice 24

Montrer que l'application

$$H\ : \{0,1\}^{\mathbf{N}} \to \mathbf{T}$$
$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2x_n}{3^{n+1}} + \mathbf{Z}$$

est une semi-conjugaison du décalage $\sigma\ : \{0,1\}^{\mathbf{N}} \to \{0,1\}^{\mathbf{N}}$ sur $F|_K$ où K est une partie compacte invariante par $F : \widehat{x} \mapsto 3\widehat{x}$. Comparer le nombre de points périodiques.

Exercice 25

(*Un exemple de sous-décalage de type fini*) Soit $X \subset \{0,1\}^{\mathbf{Z}}$ l'ensemble des suites n'ayant pas deux 0 consécutifs.

1) Montrer que X est une partie fermée invariante par le décalage $\sigma\ : \{0,1\}^{\mathbf{Z}} \to \{0,1\}^{\mathbf{Z}}$.

2) Montrer que X est homéomorphe à $\{0,1\}^{\mathbf{Z}}$.

3) Expliquer pourquoi $\sigma|_X$ n'est pas conjugué à σ.

4) Montrer que $\sigma|_X$ est positivement mélangeante.

5) Montrer que les points périodiques de $\sigma|_X$ sont denses dans X.

6) Pour i, j dans $\{0,1\}$ et $n \geq 0$, notons $u^n_{i,j}$ le nombre de mots de longueur $n+1$ qui peuvent apparaître dans les suites $x \in X$.Trouver des relations de récurrence définissons les $(u^n_{i,j})_{n\geq 0}$ puis déterminer ces suites.

7) Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log\left(\sharp \mathrm{Fix}\left((\sigma|_X)^n\right)\right).$$

Exercice 26

Fixons $p \geq 2$ et définissons l'ensemble $X_p \subset \{-1,1\}^{\mathbf{Z}}$ des suites x telles que

$$n \geq m \Rightarrow \left|\sum_{k=m}^{n} x_k\right| \leq p.$$

Montrer que X est une partie fermée invariante par le décalage $\sigma\ : \{-1,1\}^{\mathbf{Z}} \to \{-1,1\}^{\mathbf{Z}}$. Prouver que $\sigma|_X$ est positivement transitif mais pas positivement topologiquement mélangeante.

Exercice 27

Montrer qu'il existe un entier $n \geq 0$ tel que $2^n = 123456789\ldots\ldots.$

Exercice 28

Soit (X,d) un espace métrique compact. On note $\mathrm{Homeo}(X)$ l'ensemble des homéomorphismes de X, et pour tout f et g dans $\mathrm{Homeo}(X)$ on pose

$$D(f,g) = \max(\max_{x\in X} d(f(x),g(x)), \max_{x\in X} d(f^{-1}(x),g^{-1}(x))).$$

1) Montrer que D définit une distance sur $\mathrm{Homeo}(X)$ et que l'espace métrique $(\mathrm{Homeo}(X), D)$ est complet.

2) On dira que $f \in \mathrm{Homeo}(X)$ est *rigide* si Id_X est valeur d'adhérence de la suite $(f^n)_{n\geq 0}$ dans $(\mathrm{Homeo}(X), D)$. Un tel homéomorphisme peut il être transitif ? topologiquement mélangeant ?

3) Le décalage de Bernouilli sur $\{1, \ldots, p\}^{\mathbf{Z}}$ est-il rigide ?

4) Une rotation de $\mathbf{T}^r$ est-elle rigide ?

5) Sous quelles conditions un automorphisme linéaire de $\mathbf{T}^r$ est-il rigide ?

Exercice 29

(*Théorème de Gottshalk-Hedlund*) Soit T un homéomorphisme minimal d'un espace topologique compact X. On se donne une application continue $\varphi\ : X \to \mathbf{R}$ et on définit pour tout $n \geq 1$, l'application $\varphi_n = \sum_{i=0}^{n} \varphi \circ T^i$. On veut prouver que les propriétés suivantes sont équivalentes

i) pour tout $x \in X$, la suite $(\varphi_n(x))_{n\geq 0}$ est bornée ;

ii) il existe $x_0 \in X$ tel que la suite $(\varphi_n(x_0))_{n\geq 0}$ est bornée ;

iii) il existe une fonction continue $\psi\ : X \to \mathbf{R}$ telle que $\varphi = \psi \circ T - \psi$.

On va commencer par prouver que **ii)** implique **iii)**. On suppose que **ii)** est vérifiée et on définit

$$\begin{aligned} F\ : X \times \mathbf{R} &\to X \times \mathbf{R} \\ (x, y) &\mapsto (T(x), y + \varphi(x)) \end{aligned}.$$

1) Montrer que F est un homéomorphisme qui commute avec

$$\begin{aligned} G_a\ : X \times \mathbf{R} &\to X \times \mathbf{R} \\ (x, y) &\mapsto (x, y + a) \end{aligned}.$$

2) Montrer que l'ensemble ω-limite de $z_0 = (x_0, 0)$ (pour F) est une partie compacte non vide qui contient un ensemble invariant minimal compact Z_0.

3) En utilisant **1)**, montrer que la projection

$$\begin{aligned} p_1\ : X \times \mathbf{R} &\to X \\ (x, y) &\mapsto x \end{aligned}$$

est injective sur Z_0.

4) Expliquer pourquoi la projection de Z_0 par p_1 est X.

5) Montrer que **iii)** est vérifiée.

6) Montrer l'équivalence entre **i)**, **ii)** et **iii)**.

Exercice 30

1) Soit T un homéomorphisme transitif d'un espace topologique compact X et $\varphi\ : X \to \mathbf{R}$ une application continue. On suppose que ψ est une solution continue de l'équation $\varphi = \psi \circ T - \psi$. Quelles sont les autres solutions ?

2) Donner un exemple d'un homéomorphisme transitif T sur un ensemble compact X et d'une fonction continue $\varphi : X \to \mathbf{R}$ qui vérifie la propriété **i)** de l'exercice 27 mais pas la propriété **iii)**.

3) Donner un exemple d'un homéomorphisme positivement transitif T sur un ensemble compact X et d'une fonction continue $\varphi : X \to \mathbf{R}$ qui vérifie la propriété **i)** de l'exercice 27 mais pas la propriété **iii)**.

Exercice 31

Soit T un homéomorphisme d'un espace métrique compact X et $\varphi : X \to \mathbf{R}$ une application continue Prouver que si $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$, l'équation $\varphi = \lambda\psi \circ T - \psi$ a une unique solution continue.

Exercice 32

Fixons $\widehat{a} \notin \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ et considérons la rotation,

$$\begin{aligned} T_{\widehat{a}} : \mathbf{T} &\to \mathbf{T} \\ \widehat{x} &\mapsto \widehat{x} + \widehat{a} \end{aligned}.$$

1) Soit $\varphi : \mathbf{T} \to \mathbf{R}$ une application continue telle que l'équation $\varphi = \psi \circ T_{\widehat{a}} - \psi$ a une solution continue. Montrer que $\int \varphi \, d\mu = 0$, où μ est la mesure de Haar.

2) Montrer que pour tout entier $q \geq 1$, il existe un entier $q' \in \{1, \dots, q\}$ tel que $\widehat{d}(q'\widehat{a}, \widehat{0}) \leq \frac{1}{q}$. En déduire qu'il existe une suite $(q_n)_{n \geq 0}$ telle que $\widehat{d}(q_n\widehat{a}, \widehat{0}) \leq \frac{1}{q_n}$.

3) À l'aide des séries de Fourier, construire une fonction continue $\varphi : \mathbf{T} \to \mathbf{R}$ vérifiant $\int \varphi \, d\mu = 0$, et telle que l'équation $\varphi = \psi \circ T_{\widehat{a}} - \psi$ n'a pas de solution continue.

Exercice 33

Soit (X, d) un espace métrique compact et $T : X \to X$ une application continue. On rappelle que $\mathcal{M}_T$ désigne l'ensemble des mesures de probabilité boréliennes invariantes et $C(X, \mathbf{R})$ l'espace des fonctions continues $f : X \to \mathbf{R}$. On dira que $f \in C(X, \mathbf{R})$ est un *cobord* s'il existe $h \in C(X, \mathbf{R})$ tel que $f = h \circ T - h$. On dira que $f \in C(X, \mathbf{R})$ et $g \in C(X, \mathbf{R})$ sont *cohomologues* si $f - g$ est un cobord. Dans ce cas, on écrira $f \sim g$.

1) Expliquer pourquoi $\sim$ est une relation d'équivalence sur $C(X, \mathbf{R})$ et montrer que $\int f \, d\mu = \int g \, d\mu$ pour tout $\mu \in \mathcal{M}_T(X)$ si $f \sim g$.

2) Soit $f \in C(X, \mathbf{R})$ et $n \geq 1$. Montrer que $f \sim S_n(f) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i$.

3) En déduire que $f \in C(X, \mathbf{R})$ est cohomologue à une fonction strictement positive $g \in C(X, \mathbf{R})$ si et seulement si $\int f \, d\mu > 0$ pour tout $\mu \in \mathcal{M}_T(X)$.

4) Montrer que $f \in C(X, \mathbf{R})$ est une limite uniforme de cobords si et seulement si $\int f \, d\mu = 0$ pour tout $\mu \in \mathcal{M}_T(X)$.

Exercice 34

Soit X un espace métrique compact et $(f_i)_{i \geq 0}$ une suite d'applications continues différentes de la fonction constante égale à 0, qui est dense dans $C(X, \mathbf{C})$. Pour tout L et L' on pose

$$d(L, L') = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{|L(f_i) - L'(f_i)|}{2^i \|f_i\|},$$

où $\|f_i\| = \sup_{x\in X} |f_i(x)|$.

1) Expliquer pourquoi d est une distance sur $C(X, \mathbf{C})^*$ et pourquoi la topologie associée est la topologie faible*.

2) Montrer que la boule unité $\{L \in C(X, \mathbf{C})^* \mid \|L\| \leq 1\}$ est compacte pour la topologie faible*.

Exercice 35

Soit $T : X \to X$ une application définie sur un espace métrique compact X. On va donner une preuve de l'existence d'une mesure de probabilité invariante extremale, c'est-à-dire d'une mesure $\mu \in M_T(X)$ telle que si $\mu = t\mu_0 + (1-t)\mu_1$, avec $\mu_0 \in M_T(X)$, $\mu_1 \in M_T(X)$ et $t \in]0, 1[$, alors $\mu_0 = \mu_1$. Soit $(f_i)_{i\geq 0}$ une suite dense dans $C(X, \mathbf{C})$.

1) Expliquer pourquoi l'ensemble

$$M_0 = \left\{\mu \in M_T(X) \mid \int f_0 \, d\mu = \sup_{\mu' \in M_T(X)} \int f_0 \, d\mu'\right\},$$

est une partie fermée convexe compacte non vide de $M_T(X)$.

2) Expliquer pourquoi on peut définir une suite décroissante de parties convexes compactes $(M_n)_{n\geq 0}$ de $M_T(X)$ par les relations :

$$M_{n+1} = \left\{\mu \in M_n \mid \int f_{n+1} \, d\mu = \sup_{\mu' \in M_n} \int f_{n+1} \, d\mu'\right\}.$$

3) Montrer que l'ensemble $\bigcap_{n\geq 0} M_n$ est réduit à un point $\{\mu\}$ et que μ est une mesure extremale.

Exercice 36

Soit X un espace topologique compact et $T_1 : X \to X$ et $T_2 : X \to X$ deux transformations continues qui commutent, c'est-à-dire telles que $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$. Montrer qu'il existe une mesure borélienne de probabilité qui est invariante par T_1 et T_2. En déduire qu'il existe un point qui est récurrent pour T_1 et pour T_2.

Exercice 37

Quelles sont les mesures boréliennes de probabilité invariantes par

$$\begin{aligned} T \ : \mathbf{T}^2 &\to \mathbf{T}^2 \\ (\widehat{x}, \widehat{y}) &\mapsto (\widehat{x} + \widehat{y}, \widehat{y}) \end{aligned} \quad ?$$

Exercice 38

Soit $T : X \to X$ une application continue sur un espace métrique compact X. Montrer que pour tout $\mu \in M_T(X)$, on a $\mathrm{supp}(\mu) \subset \Omega(T)$.

Exercice 39

Donner un exemple d'un homéomorphisme d'un espace métrique compact qui est uniquement ergodique mais pas minimal. Donner un exemple avec un point fixe.

Exercice 40

Soit $T\ : X \mapsto X$ une application continue uniquement ergodique sur un espace métrique compact X. Montrer qu'il existe une seule partie fermée minimale.

Chapitre 2

Exercice 1

On rappelle que $T_G : [0,1[\to [0,1]$ est la transformation de Gauss. Montrer que la suite $(T^n(x))_{n\geq 0}$ est bien définie si et seulement si x est irrationnel.

Exercice 2

1) Considérons la suite des premiers chiffres 1, 2, 4, 8, 1, ... des puissances 2^n, $n \geq 0$. Quelle est la fréquence d'apparition du chiffre 7 dans cette suite ?

2) On considère la suite des 9 premiers chiffres des puissances 2^n, $n \geq n_0$, n_0 assez grand. Voit-on plus souvent un 123456789 ou un 987654321 dans cette suite ?

Exercice 3

Montrer que presque tout point $x \in [0,1]$ est normal dans toute base $q \geq 2$. Ceci signifie que dans le développement q-adique $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{r_i}{q^i}$, $0 \leq r_i < q$, chaque entier de $\{0,\ldots,q-1\}$ apparaît avec une fréquence $1/q$ dans la suite $(r_i)_{i\geq 1}$.

Exercice 4

1) Expliquer pourquoi la fonction $f\ : [0,1] \to [0,1]$ préserve la mesure de Lebesgue, où

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq \frac{1}{2}, \\ 2(1-x) & \text{si } x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

2) Montrer que f est mélangeante, pour la mesure de Lebesgue.

Exercice 5

1) Expliquer pourquoi la fonction $f\ : [0,1[^2\to [0,1[^2$ préserve la mesure de Lebesgue, où

$$f(x,y) = \begin{cases} (2x, \frac{y}{2}) & \text{si } x < \frac{1}{2}, \\ (2x-1, \frac{y+1}{2}) & \text{si } x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

2) Monter que ce système dynamique mesuré est conjugué au décalage de Bernouilli bilatéral sur $\{0,1\}^{\mathbf{Z}}$ muni de la mesure équidistribuée.

3) Le premier système est-il mélangeant ?

Exercice 6

Soit $T\ : X \mapsto X$ une application continue sur un espace métrique compact X. Montrer que deux mesures boréliennes de probabilités invariantes ergodiques distinctes μ_1 et μ_2 sont mutuellement singulières.

Exercice 7

1) On suppose que $\widehat{a} \notin \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. Montrer que

$$\begin{aligned} T\ :\ & \mathbf{T}^2 \to \mathbf{T}^2 \\ & (\widehat{x}, \widehat{y}) \mapsto (\widehat{x} + \widehat{a}, \widehat{x} + \widehat{y}) \end{aligned}$$

préserve la mesure de Haar et est ergodique

2) Le système dynamique est-il mélangeant ?

Exercice 8

(*Lemme de Kac*) Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un système dynamique mesuré ergodique, avec $\mu(X) = 1$. On suppose que $A \in \mathcal{B}$ vérifie $\mu(A) > 0$ et pour tout $x \in X$ on définit

$$n_A(x) = \inf\{n \geq 1 \,|\, T^n(x) \in A\}.$$

1) Expliquer pourquoi $n_A(x) < +\infty$, pour presque tout $x \in X$.

2) Pour tout $n \geq 1$, on définit

$$A_n = \{x \in A \,|\, n_A(x) = n\} \ \text{ et } \ B_n = \{x \notin A \,|\, n_A(x) = n\}.$$

Montrer que

$$\mu(B_n) = \mu(A_{n+1}) + \mu(B_{n+1}) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mu(A_k).$$

3) En déduire que $\int_A n_A \, d\mu = 1$. Quelle est la valeur moyenne de n_A sur A ?

Exercice 9

Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un système dynamique mesuré tel que $\mu(X) = 1$. Soit $A \in \mathcal{B}$. On note χ_A la fonction caractéristique de A.

1) Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $\displaystyle\int \left(\sum_{0 \leq k < n} \chi_A \circ T^k \right)^2 d\mu \geq n^2 \mu(A)^2$.

2) En déduire que $\limsup_{n \to +\infty} \mu(A \cap T^{-n}(A)) \geq \mu(A)^2$.

Exercice 10

Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un système dynamique mesuré tel que $\mu(X) = 1$. Montrer que T est mélangeant si et seulement si $T \times T$ est mélangeant.

Chapitre 3

Exercice 1

Montrer que l'entropie topologique d'un homéomorphisme de $[0, 1]$ est nulle.

Exercice 2

Donner un exemple d'homéomorphisme $T\ : X \to X$ d'un espace compact dont l'entropie topologique est infinie.

Exercice 3

Soient $T_1\ : X_1 \to X_1$ et $T_2\ : X_2 \to X_2$ deux applications définies sur des espaces métriques compacts. Montrer que l'entropie de l'application produit

$$\begin{aligned} T_1 \times T_2\ : X_1 \times X_2 &\to X_1 \times X_2 \\ (x_1, x_2) &\mapsto (T_1(x_1), T_2(x_2)) \end{aligned}$$

vérifie $h(T_1 \times T_2) = h(T_1) + h(T_2)$ (on utilisera la caractérisation par ensembles couvrants et séparants).

Exercice 4

Quelle est l'entropie de $T\ : z \mapsto z^2$ définie sur la sphère de Riemann.

Exercice 5

Soit $T\ : X \to X$ une application continue définie sur un espace topologique compact. On rappelle que l'ensemble $\Omega(T)$ des points non errants est fermé et invariant par T.

1) On suppose que $\Omega(T)$ est fini. Montrer que $h(T) = 0$ (on cherchera d'abord une famille génératrice pertinente de recouvrements).

2) Plus généralement, montrer que $h(T) = h(T|_{\Omega(T)})$.

Exercice 6

Soit $T\ : X \to X$ une application continue définie sur un espace topologique compact. On suppose qu'il existe une famille finie $(X_i)_{1 \le i \le p}$ de parties fermées positivement invariantes (i.e. $T(X_i) \subset X_i$), telles que $X = \bigcup_{1 \le i \le p} X_i$. Montrer que $h(T) = \sup_{1 \le i \le p} h(T|_{X_i})$. On pourra commencer par le cas où X est métrisable.

Exercice 7

Soit $\alpha \in \mathbf{T}^1$. Calculer l'entropie topologique de

$$\begin{aligned} F\ : \mathbf{T}^2 &\to \mathbf{T}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x + y, y + \alpha) \end{aligned}.$$

Exercice 8

Soit $T\ : X \to X$ une application lispshitzienne sur un espace métrique compact. L'entropie peut elle être infinie ? et sur une variété différentiable compacte ?

Exercice 9

Soit $T\ : X \to X$ une transformation continue définie sur un espace métrique compact. On dit que T est *positivement expansive* s'il existe $\delta > 0$ tel que pour tous x et y distincts, il existe $n \ge 0$ tel que $d(T^n(x), T^n(y)) \ge \delta$.

1) Donner des exemples d'applications qui sont expansives et d'applications qui ne le sont pas.

2) Montrer que si X est compact, la propriété d'expansivité est topologique, c'est-à-dire qu'elle ne dépend que de la topologie induite par d et non pas de d elle-même.

Exercice 10

Soit $T : X \to X$ une transformation continue définie sur un espace métrique compact. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

- T est expansive ;
- il existe un recouvrement générateur ;
- si $\varepsilon > 0$ est assez petit, le recouvrement $\mathcal{U}^\varepsilon$ par boules de rayon ε est générateur.

Exercice 11

L'entropie d'une application continue expansive $T : X \to X$ sur un espace métrique compact peut-elle être infinie ?

Exercice 12

Soit $T : X \to X$ une application continue expansive sur un espace métrique compact.

1) Montrer que pour tout $n \geq 1$, l'ensemble $\mathrm{Fix}(T^n)$ est fini.

2) Montrer que $h(T) \geq \limsup_{n \to =\infty} \frac{1}{n} \ln(\sharp \mathrm{Fix}(T^n))$.

Exercice 13

Soit $T : X \to X$ un homéomorphisme d'un espace métrique compact. Montrer que si T est positivement expansif, alors X est fini.

Exercice 14

Soit $T : X \to X$ un homéomorphisme d'un espace métrique compact. On dit que T est *expansif* s'il existe $\delta > 0$ tels que pour tous x et y, il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $d(T^k(x), T^k(y)) \geq \delta$.

1) Donner des exemples d'applications qui sont expansives et d'applications qui ne le sont pas.

2) Montrer que T est expansif si et seulement si la suite $\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^i(\mathcal{U}_\varepsilon)\right)_{n \geq 0}$ est génératrice si $\varepsilon > 0$ est assez petit, et que $h(T) < +\infty$.

3) Là encore, montrer que pour tout $n \geq 1$, l'ensemble $\mathrm{Fix}(T^n)$ est fini et que $h(T) \geq \limsup_{n \to =\infty} \frac{1}{n} \ln(\sharp \mathrm{Fix}(T^n))$.